SOLUÇÃO MODIFICADA DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES COM APLICAÇÃO NO MERCADO BRASILEIRO

IAGO MARCOLINO[1]; LESLIE FERNANDEZ[2]; CLAUDIO PETERSEN[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas 1 – iago.mat@hotmail.com 1*
[2]*Universidade Federal de Pelota – leslie.fernandez@ufpel.edu.br 2*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – claudio.petersen@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A precificação de derivativos é um tema com constante discussão na área de investimentos financeiros, bem como a precificação de opções que é uma classe dos derivativos. O modelo de Black-Scholes é um dos pilares na teoria dos derivativos financeiros, o qual se mostra bastante eficiente, como bem apontado por Wilmott et al. (1995).

O modelo de Black-Scholes já foi solucionado de diversas formas analítica e numericamente, conforme abordado em SAEDI; TULARAM (2018). Este modelo se trata de uma equação diferencial parcial que faz a projeção teórica do preço das opções estilo europeu. Essa equação mostra que o preço da opção seja de compra ou venda possuem um valor único e não afeta o risco nem o retorno esperado do ativo subjacente.

Este trabalho apresenta uma solução modificada da equação de Black-Scholes mediante a sua transformação na equação da difusão-advecção-reação, cuja solução é obtida por meio da transformada de Fourier, considerando todas as condições iniciais e de contorno da equação original. Além disso será feita uma aplicação no mercado de opções brasileiro.

2. METODOLOGIA

Partindo do modelo de Black-Scholes, para uma opção europeia de compra de uma ação que não paga dividendos, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial C(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} - rC(S,\ t) = 0 \\ C(S,\ t) = \max\{S - E,\ 0\} \end{cases}, \tag{1}$$

onde $C(t, S)$ é o preço da opção no instante t, S é o preço do ativo subjacente, σ é a volatilidade anual do ativo e r é a taxa de juros livre de risco anual.

Espera-se que no final do período o valor do ativo seja maior que o preço de exercício E. Assim tem-se as seguintes condições de fronteira no caso se o preço do ativo for muito pequeno $\lim_{S\to 0^+} C(t,S) = 0$, e se o preço do ativo for muito grande $\lim_{S\to+\infty} S - C(t,S) = Ee^{-r(T-t)}$, com $t \geq 0$.

Para solucionar inicia-se fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$t = T - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\tau, S = Ee^x \Longrightarrow \quad \tau = -\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right], x = \ln\left(\frac{S}{E}\right) \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

Em seguida define-se uma nova incógnita $v(\tau,x)$ da forma $C(t,S)=Ev(\tau,x)$, na qual é substituída na Equação (1). De aplicar a regra da cadeia, fazer as devidas simplificações e isolar o termo $\partial v/\partial\tau$, tem-se a seguinte equação de difusão-advecção-reação:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{2r}{\sigma^2}v(\tau,x),\ (\tau,x)\in\left(0,\frac{\sigma^2 T}{2}\right]\times\mathbb{R}. \tag{3}$$

Chamando $c=\frac{2r}{\sigma^2}$ e $g=1-\frac{2r}{\sigma^2}$, e colocando um termo difusivo p como parâmetro livre. Assim, nosso problema de valor inicial toma a forma

$$\begin{cases}\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}=p\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial x^2}-g\frac{\partial v}{\partial x}-cv(\tau,x)\\ v(0,x)=v_0(x)\end{cases},\quad (\tau,x)\in\left(0,\frac{\sigma^2 T}{2}\right]\times\mathbb{R} \tag{4}$$

onde $v_0(x)=\max\{e^x-1,0\}$

Ao aplicar a transformada de Fourier na Equação (4), obter sua respectiva transformada inversa e realizar uma série de manipulações algébricas mudanças no intervalo de integração e relacionar parte da solução com a distribuição normal acumulada chega-se na seguinte solução:

$$v(\tau,x)=e^{\tau(p-c-g)}\,e^x\,N(d_1)-e^{-c\tau}N(d_2), \tag{5}$$

onde $d_1=\frac{x-g\tau+2p\tau}{\sqrt{2p\tau}}$ e $d_2=\frac{x-g\tau}{\sqrt{2p\tau}}$.

Voltando para as varáveis originais, a solução modificada tem a seguinte forma:

$$C(t,S)=e^{p\left(\frac{T\sigma^2}{2}-\frac{t\sigma^2}{2}\right)}\,e^{-\left(\frac{T\sigma^2}{2}-\frac{t\sigma^2}{2}\right)}S\,N(d_1)-e^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{6}$$

Com $d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+r(T-t)+p\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}}$ e $d_2=\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+r(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}}$.

A estrutura da solução (7) é parecida com a solução tradicional da Equação de Black-Scholes (Silva, 2017), porém com 2 termos exponenciais a mais multiplicando. A solução tradicional não considera um coeficiente de difusão qualquer.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Será feito agora uma aplicação dessa solução modificada para diferentes valores do parâmetro p. No qual, quando $p=1$ a solução é exatamente o cálculo tradicional de Black-Scholes (Silva, 2017).

Devido à baixa liquidez frequente no mercado brasileiro, será utilizado o Preço Médio Ponderado pelo Volume (VWAP) da opção e do ativo subjacente.

A Tabela 1 a seguir mostram a data, o preço do ativo subjacente (VWAP Ação), o preço teórico calculado via Black-Scholes modificado para diferentes valores do parâmetro p, sendo eles $p=0{,}5$; $p=0{,}75$; $p=1$; $p=1{,}5$; $p=2$; $p=2{,}5$.

Para o ativo subjacente Vale S. A. (VALE3), será avaliado a opção de compra europeia VALEI563 com strike em R$ 54,75 e vencimento em 19/09/2025 com uma volatilidade anual de 26,09% e uma taxa de juros de 15%.

Data	VWAP Ação	VWAP Opção	B-S $p = 0{,}5$	B-S $p = 0{,}75$	B-S $p = 1$	B-S $p = 1{,}5$	B-S $p = 2$	B-S $p = 2{,}5$
19/08/2025	53,26	0,88	0,7698	1,03	1,2664	1,6634	2,071	2,3164
18/08/2025	53,33	0,95	0,8228	1,0962	1,3323	1,7385	2,0899	2,4059
15/08/2025	53,24	0,94	0,8607	1,1471	1,3947	1,8209	2,1899	2,522
14/08/2025	53,31	1,03	0,9141	1,2072	1,4601	1,8951	2,2714	2,61
13/08/2025	54,26	1,56	1,3962	1,7067	1,9727	2,4277	2,82	3,1724
12/08/2025	54,35	1,54	1,4727	1,7877	2,0578	2,52	2,9188	3,2771
11/08/2025	53,9	1,37	1,2618	1,579	1,8509	2,3163	2,7178	3,0787
08/08/2025	53,63	1,22	1,2058	1,533	1,814	2,2956	2,7119	3,0864
07/08/2025	52,66	0,88	0,8193	1,1273	1,3964	1,8631	2,2699	2,6376
06/08/2025	52,5	0,87	0,7825	1,0898	1,3592	1,8278	2,2371	2,6076
05/08/2025	52,85	1,12	0,93	1,2588	1,5396	2,0249	2,4469	2,8277
04/08/2025	52,46	1,03	0,8094	1,1248	1,4012	1,882	2,3019	2,6812
01/08/2025	52,6	1,18	0,9234	1,2573	1,5483	2,0527	2,4923	2,89
31/07/2025	51,65	0,98	0,6231	0,9243	1,1946	1,673	2,0961	2,4819
30/07/2025	52,42	1,36	0,8964	1,2333	1,5279	2,0398	2,4868	2,8917
29/07/2025	53,5	1,81	1,3828	1,75	2,0657	2,6082	3,0781	3,5019
28/07/2025	53,39	1,74	1,3526	1,7222	2,0402	2,5869	3,0608	3,4883
25/07/2025	53,93	2,03	1,6987	2,0853	2,4176	2,9887	3,4837	3,9305
24/07/2025	54,99	2,67	2,3539	2,7388	3,0732	3,652	4,1564	4,613
23/07/2025	55,77	3,3	2,9104	3,2835	3,6131	4,1906	4,6982	5,1597
22/07/2025	55,82	3,35	2,9715	3,3469	3,679	4,2616	4,774	5,2402
21/07/2025	54,54	2,63	2,1458	2,5461	2,8919	3,4885	4,0073	4,4765
18/07/2025	52,96	1,65	1,3703	1,771	2,117	2,7138	3,2329	3,7025
17/07/2025	52,87	1,69	1,3501	1,7527	2,1007	2,7013	3,2239	3,6969
16/07/2025	52,7	1,66	1,2947	1,6972	2,0458	2,6482	3,173	3,6483
15/07/2025	52,45	1,65	1,2073	1,6072	1,9546	2,5565	3,0818	3,558
14/07/2025	53,71	2,24	1,8332	2,2581	2,6241	3,2843	3,8022	4,2978
11/07/2025	54,22	2,63	2,18	2,6256	3,0021	3,652	4,2181	4,7308

Tabela 1: Comparação entre preços observados da opção e valores teóricos pelo modelo de Black-Scholes modificado, para diferentes valores de

A próxima Tabela 2 mostra o erro relativo entre o preço teórico observado na Tabela 1 e o preço real de mercado (VWAP Opção).

Data	VWAP Ação	Erro rel. $p = 0{,}5$	Erro rel. $p = 0{,}75$	Erro rel. $p = 1$	Erro rel. $p = 1{,}5$	Erro rel. $p = 2$	Erro rel. $p = 2{,}5$	Erro rel. $p = 2{,}5$
19/08/2025	53,26	0,1252	0,1705	0,4391	0,8902	1,3534	1,6323	1,6323
18/08/2025	53,33	0,1339	0,1539	0,4024	0,8300	1,1999	1,5325	1,5325
15/08/2025	53,24	0,0844	0,2203	0,4837	0,9371	1,3297	1,6830	1,6830
14/08/2025	53,31	0,1125	0,1720	0,4176	0,8399	1,2052	1,5340	1,5340
13/08/2025	54,26	0,1050	0,0940	0,2646	0,5562	0,8077	1,0336	1,0336
12/08/2025	54,35	0,0437	0,1608	0,3362	0,6364	0,8953	1,1280	1,1280
11/08/2025	53,9	0,0790	0,1526	0,3510	0,6907	0,9838	1,2472	1,2472
08/08/2025	53,63	0,0116	0,2566	0,4869	0,8816	1,2229	1,5298	1,5298
07/08/2025	52,66	0,0690	0,2810	0,5868	1,1172	1,5794	1,9973	1,9973
06/08/2025	52,5	0,1006	0,2526	0,5623	1,1009	1,5714	1,9972	1,9972
05/08/2025	52,85	0,1696	0,1239	0,3746	0,8079	1,1847	1,5247	1,5247
04/08/2025	52,46	0,2142	0,0920	0,3604	0,8272	1,2349	1,6031	1,6031
01/08/2025	52,6	0,2175	0,0655	0,3121	0,7396	1,1121	1,4492	1,4492
31/07/2025	51,65	0,3642	0,0568	0,2190	0,7071	1,1389	1,5326	1,5326
30/07/2025	52,42	0,3409	0,0932	0,1235	0,4999	0,8285	1,1263	1,1263
29/07/2025	53,5	0,2360	0,0331	0,1413	0,4410	0,7006	0,9348	0,9348
28/07/2025	53,39	0,2226	0,0102	0,1725	0,4867	0,7591	1,0048	1,0048
25/07/2025	53,93	0,1632	0,0272	0,1909	0,4723	0,7161	0,9362	0,9362
24/07/2025	54,99	0,1184	0,0258	0,1510	0,3678	0,5567	0,7277	0,7277
23/07/2025	55,77	0,1181	0,0050	0,0949	0,2699	0,4237	0,5635	0,5635
22/07/2025	55,82	0,1130	0,0009	0,0982	0,2721	0,4251	0,5642	0,5642

21/07/2025	54,54	0,1841	0,0319	0,0996	0,3264	0,5237	0,7021	0,7021
18/07/2025	52,96	0,1695	0,0733	0,2830	0,6447	0,9593	1,2439	1,2439
17/07/2025	52,87	0,2011	0,0371	0,2430	0,5984	0,9076	1,1875	1,1875
16/07/2025	52,7	0,2201	0,0224	0,2324	0,5953	0,9114	1,1978	1,1978
15/07/2025	52,45	0,2683	0,0259	0,1846	0,5494	0,8678	1,1564	1,1564
14/07/2025	53,71	0,1816	0,0081	0,1715	0,4662	0,6974	0,9187	0,9187
11/07/2025	54,22	0,1711	0,0017	0,1415	0,3886	0,6038	0,7988	0,7988

Tabela 2: Erros relativos entre preços observados e valores teóricos do modelo de Black-Scholes modificado, para diferentes p.

Pode-se observar que do dia 11/07/2025 até ao dia 05/08/2025 os menores erros relativos foram para $p = 0{,}75$, do dia 06/08/2025 até o dia 19/08/2025 os menores erros relativos foram em sua maioria para $p = 0{,}5$.

Parece existir um p ideal que descrever melhor o preço teórico em relação ao preço real de mercado.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado de forma bem resumida como chegou-se a uma solução modificada equação de Black-Scholes, mapeando-a para equação da difusão-advecção-reação, incluindo um parâmetro livre p e solucionando via transformada de Fourier.

A solução modificada apresentou uma leve diferença da solução tradicional na qual foi testada para diferentes valores do parâmetro p. A solução modificada se mostrou mais eficiente que a solução tradicional em vários casos. Dessa forma parece existir um p ideal que descrever melhor o preço teórico em relação ao preço real de mercado.

Como perspectivas futuras, propõem-se investigar quais são as dependências desse parâmetro p e uma maneira de ajusta-lo, afim de descrever melhor as dinâmicas do preço de mercado.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of political economy**, [S.l.], v.81, n.3, p.637–654, 1973.

DEVORE, J. L.; BERK, K. N. **Modern Mathematical Statistics with Applications**. 2. ed. New York: Springer, 2012.

SILVA, B. F. C. da. **Modelo de Black-Scholes como alternativa de investimento para os produtores rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. 2017. 182 f.** Dissertação (Mestrado em Tecnologia, Ambiente e Sociedade) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Diamantina, 2017.

SAEDI, Y. H. A.; TULARAM, G. A. A review of the recent advances made in the Black-Scholes models and respective solutions methods. ***Journal of Mathematics and Statistics***, [S.l.], v.14, n.1, p.29–39, 2018.

WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. **The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.