ESTUDO DE ORDENS MONOMIAIS EM POLINÔMIOS MULTIVARIADOS.

LEONARDO PAIVA CONTRERAS[1]; ALEXANDRE SACCO DE ATHAYDE[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas – LeonardoP.Contreras@outlook.com
[2]Univerdiade Federal de Pelotas – alexandre.athayde@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A classificação de polinômios, sejam de uma ou múltiplas variáveis, é um passo fundamental para a compreensão da estrutura algébrica e para o desenvolvimento de técnicas de resolução de problemas matemáticos. Nesse contexto, as relações de ordem desempenham um papel central, pois permitem organizar os termos de maneira sistemática e coerente, tanto em análises teóricas quanto em aplicações práticas.

Em polinômios de uma variável, a ordenação por grau decrescente facilita a identificação de propriedades como o próprio grau (deg), o coeficiente líder (cl) e a forma canônica. Já em polinômios multivariados, as ordens monomiais tornam-se ainda mais cruciais: elas estabelecem critérios para comparar monômios com diferentes combinações de variáveis e expoentes, sendo indispensáveis para algoritmos de simplificação, divisão e para a construção de bases de Gröbner. Entre as ordens mais utilizadas destacam-se a lexicográfica clássica (lex), reversa ($grlex$) e reversa graduada ($grevlex$), cada um com características próprias que influenciam diretamente na manipulação algébrica e computacional de polinômios. Um polinômio é composto por termos, cada um sendo o produto de um coeficiente a_n com um monômio x^α. Formalmente, seja $\mathbb{K}$ um corpo, um termo polinomial é escrito na seguinte forma:

$$t = a_n x^\alpha, \quad \text{com } a_n \in \mathbb{K}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}$$

Uma ordem monomial é então uma relação que compara diretamente os monômios x^α, devendo ser total, compatível com a multiplicação e assegurar a existência de um menor elemento em qualquer subconjunto não vazio.

2. METODOLOGIA

Neste estudo, procuramos entender como a escolha da ordem afeta a divisão de polinômios multivariados, aplicando três ordens lexicográficas para determinar os monômios líderes (ml) e os termos líderes (tl). Sejam W_{lex}, W_{grlex} e $W_{grevlex}$ as matrizes associadas às ordens, definimos:

1. Ordem lexicográfica clássica ($\prec_{lex}$):

$$W_{lex} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao aplicar, compara-se os expoentes na ordem usual das variáveis, do primeiro ao último índice. O primeiro lugar em que os expoentes diferem determina qual monômio é maior ou menor.

2. Ordem lexicográfica graduada ($\prec_{grlex}$):

$$W_{grlex} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro compara-se a soma dos graus de cada variável (grau total). O monômio de menor grau vem antes. Em caso de empate, aplica-se o critério lexicográfico.

3. Ordem lexicográfica reversa graduada ($\prec_{grevlex}$):

$$W_{grevlex} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é o mesmo da graduada tradicional. Se o grau total for igual, comparamos do último ao primeiro expoente, onde menor expoente implica em um monômio maior. Como exemplo, aplicamos estas definições à um polinômio do tipo $f(x,y,z) \in \mathbb{Q}[x,y,z]$ com o objetivo de ordenar os monômios e identificar o termo líder. Escolhemos o polinômio:

$$f(x,y,z) \ = 4xyz^2 + 4x^2 - 5y^4 + 7xy^2z$$

Separamos o polinômio em quatro termos e avaliamos os vetores associados aos expoentes.

$$\begin{gathered} x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z \\ t_1 = \ 4xyz^2, \qquad t_2 = 4x^2, \qquad t_3 \ = -5y^4, \qquad t_4 = \ 7xy^2z \\ X_\alpha = \ xyz^2, \qquad X_\beta = x^2, \qquad X_\gamma \ = y^4, \qquad X_\theta = \ xy^2z \\ \alpha = (1,1,2), \qquad \beta = (2,0,0), \qquad \gamma = (0,4,0), \qquad \theta = (1,2,1) \end{gathered}$$

Aplicamos as ordens lexicográficas em cada um dos monômios associados, começando pela ordem clássica.

$$\alpha^T \cdot W_{lex} = [1 \quad 1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 2]$$

$$\beta^T \cdot W_{lex} = [2 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0 \quad 0]$$

$$\gamma^T \cdot W_{lex} = [0 \quad 4 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 4 \quad 0]$$

$$\theta^T \cdot W_{lex} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Com isso verificamos que há um empate entre a primeira e ultima matriz linha resultante com respeito ao primeira variável, então aplicamos a condição de desempate ao considerar o termo seguinte. Por meio da definição, obteremos o seguinte ordenamento entre os monômios:

$$y^4 \prec_{lex} xyz^2 \prec_{lex} xy^2z \prec_{lex} x^2$$

Obtemos, para esta ordem, o monômio líder X_β e o termo líder t_2. Agora aplicamos a ordem lexicográfica graduada através de sua matriz.

$$\alpha^T \cdot W_{grlex}^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\beta^T \cdot W_{grlex}^T = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma^T \cdot W_{grlex}^T = \begin{bmatrix}0 & 4 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\theta^T \cdot W_{grlex}^T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Vemos que, há um empate entre a primeira, terceira e quarta matriz linha resultante com respeito ao primeiro termo associado à soma dos expoentes, então aplicamos a condição de desempate ao considerar os termos da ordem lexicográfica clássica. Obtemos o seguinte ordenamento entre monômios:

$$x^2 \prec_{grlex} y^4 \prec_{grlex} xyz^2 \prec_{grlex} xy^2z$$

Neste caso, o monômio e termo líderes serão X_θ e t_4. Dessa forma, seguimos para a ordem lexicográfica reversa graduada, seguindo os mesmos passos realizados anteriormente.

$$\alpha^T \cdot W_{grevlex}^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\beta^T \cdot W_{grevlex}^T = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\gamma^T \cdot W_{grevlex}^T = \begin{bmatrix}0 & 4 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\theta^T \cdot W_{grevlex}^T = [1 \quad 2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [4 \quad 1 \quad 2 \quad 1]$$

Com isso obtemos o ordenamento monomial, onde o monômio líder será X_γ e, por consequência, o termo líder será t_3.

$$x^2 \prec_{grevlex} xyz^2 \prec_{grevlex} xy^2z \prec_{grevlex} y^4$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

	$tl(f)$	$ml(f)$	$cl(f)$	$\deg(f)$
$\prec_{lex}$	$4x^2$	x^2	4	$(2,0,0)$
$\prec_{grlex}$	$7xy^2z$	xy^2z	7	$(1,2,1)$
$\prec_{grevlex}$	$-5y^4$	y^4	-5	$(0,4,0)$

Tabela 1: Tabela dos termos líderes de cada ordem e seus monômios, coeficientes e vetores de grau associado.

O termo líder define em qual divisor o dividendo será ajustado primeiro e, assim, controla toda a sequência da divisão. Como mostrado nos resultados, a escolha da ordem monomial altera diretamente o termo líder, o que leva a diferentes resultados parciais, afetando simplificações e eliminações de variáveis. Além disso, em aplicações como física e computação, essa escolha influencia quais efeitos se tornam dominantes, quais algoritmos são mais eficientes e como os resultados finais são interpretados.

4. CONCLUSÕES

Neste estudo, aplicamos as ordens monomiais lexicográfica, graduada e graduada reversa a um polinômio multivariado para identificar termo, monômio e coeficiente líderes. Observamos que o termo líder varia conforme a ordem escolhida, o que afeta diretamente a divisão polinomial, influenciando a sequência de simplificações e a eficiência dos cálculos analíticos e computacionais.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. 7. ed. 280 p. ISBN 978-65-89124-10-8.

CAPAVERDE, J.G. **Bases de Gröbner e aplicações em aproximações de Padé e codificação**. 2009. 90f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.