

EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA NA MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO O CONTROLE BIOLÓGICO DA BROCA-DA-CANA-DE-AÇÚCAR

DANTON SOUZA CAMACHO¹, RÉGIS SPEROTTO DE QUADROS²

¹UFPel – danton.camacho@gmail.com

²UFPel – regis.quadros@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O combate às pragas no plantio da cana-de-açúcar é fundamental para a colheita desta planta tão popular. Dentre as pragas que assolam sua cultura, está a broca-da-cana-de-açúcar (*Diatraea saccharalis*), uma espécie de mariposa da família Crambidae. Em virtude dos danos causados na produção de recursos provenientes da cana-de-açúcar, como açúcar e etanol, um dos principais métodos de controle biológico da broca-da-cana é o uso da vespa (*Cotesia flavipes*), conhecida por ser o inimigo natural da broca-da-cana. Quando em contato com esta, a vespa desfere uma picada e logo em seguida deposita cerca de cinquenta ovos que parasitam e se alimentam da broca-da-cana, que, consequentemente, é levada à morte.

Em face da dificuldade para eliminar essa praga que ataca a cana-de-açúcar por dentro, o uso da vespa, segundo GOMES et al (2020), é preferível ao uso de agrotóxicos. Os autores alegam que "...a utilização de agrotóxicos na cana-de-açúcar, assim como em qualquer cultura traz várias consequências para o meio ambiente e para a população, o uso frequente e incorreto pode causar contaminação de solos, das águas superficiais e subterrâneas, dos alimentos, da atmosfera".

A fim de compreender melhor como funciona esse controle biológico, a modelagem matemática é usada para interpretar os padrões que aparecem na disputa entre a vespa e a broca-da-cana, possibilitando assim uma análise mais completa deste fenômeno. Para tal, é utilizado o modelo predador-presa, também chamado de modelo de Lotka-Volterra. Assim, a partir desta modelagem, são descritas as interações entre as populações de vespas e brocas ao longo do tempo. O estudo apresenta a formulação do modelo, destacando os parâmetros biológicos envolvidos, e exemplifica sua aplicação em simulações numéricas. Os resultados demonstram oscilações cíclicas entre as duas populações, evidenciando a eficácia do controle biológico, já que a introdução das vespas reduz significativamente a densidade da praga por períodos prolongados. Conclui-se que o modelo permite compreender melhor a dinâmica da interação entre espécies e reforça o potencial da modelagem matemática como ferramenta didática e científica para analisar fenômenos ecológicos e propor soluções sustentáveis para a agricultura.

2. METODOLOGIA

A abordagem para este trabalho é de cunho descritivo, isto é, visa unicamente a descrição detalhada do funcionamento do modelo de Lokta-Volterra em um estudo de caso específico. Por meio do material selecionado e

previamente estudado, pretende-se esclarecer a essência deste modelo e fornecer alguns exemplos dentro da sua aplicação.

A base para o modelo predador-presa é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = aB - bBV \\ \frac{dV}{dt} = cBV - dV \end{cases}$$

Assim, $B(t)$ representa a quantidade de brocas-da-cana e $V(t)$ representa a quantidade de vespas, sendo ambas no tempo t , onde:

$$\begin{aligned} B(t) &= \text{população de presas no tempo } t \\ V(t) &= \text{população de predadores no tempo } t \end{aligned}$$

E as constantes a, b, c e d ($a, b, c, d > 0$) estão diretamente relacionadas com os seguintes parâmetros:

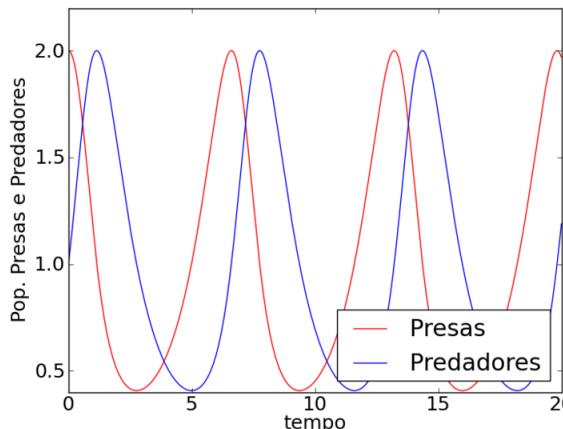
- $a \rightarrow$ taxa de crescimento líquida da presa
- $b \rightarrow$ taxa de predação (captura da presa)
- $c \rightarrow$ taxa de presas mortas por predadores
- $d \rightarrow$ taxa de mortalidade do predador

A primeira equação indica que a variação do crescimento ou decrescimento do número de presas é proporcional ao número de presas subtraído pelo número de encontros entre predadores e presas (onde a presa tende a ser eliminada), enquanto que a segunda indica que o crescimento ou decrescimento do número de predadores é proporcional ao número de encontros entre predadores e presas (onde o predador goza de vantagem numérica) subtraído pelo número de predadores (que podem perecer conforme disputam as presas entre si). Nesse contexto, é pressuposto que o ambiente não interfere na disputa. A lógica por trás desse sistema de equações personifica o modelo e descreve a tendência resultante no confronto entre vespas e brocas-da-cana. Através da interação entre estas espécies, decorre que as populações oscilam com o passar do tempo, revelando um padrão de aumento e diminuição.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O gráfico apresentado na Figura 1, retrata esse sistema de equações (onde as constantes $a, b, c, d = 1$) e expõe mais claramente como se dá essa oscilação.

Figura 1 - Gráfico das populações de presas e predadores em função do tempo oriundo do modelo predador-presa



Fonte: do Autor

Considerando os parâmetros usados para determinar as constantes que calculam as populações de brocas-da-cana e de vespas em função do tempo, é possível obter diferentes constantes que geram diferentes resultados. A seguir, uma breve demonstração da forma que JESUS (2019) utilizou para determinar o valor da constante a .

Retirando a variável correspondente à vespa na equação, temos:

$$\frac{dB}{dt} = aB \Rightarrow B(t) = B_0 \cdot e^{at}$$

Ora, a variável $B(t)$ pode ser alcançada pela multiplicação entre o número de fêmeas da broca-da-cana, o número de fêmeas inicial e sua taxa de sobrevivência. Logo, igualamos esta fórmula à equação obtida (sendo B_f = número de fêmeas, B_0 = número de fêmeas inicial e s = taxa de sobrevivência):

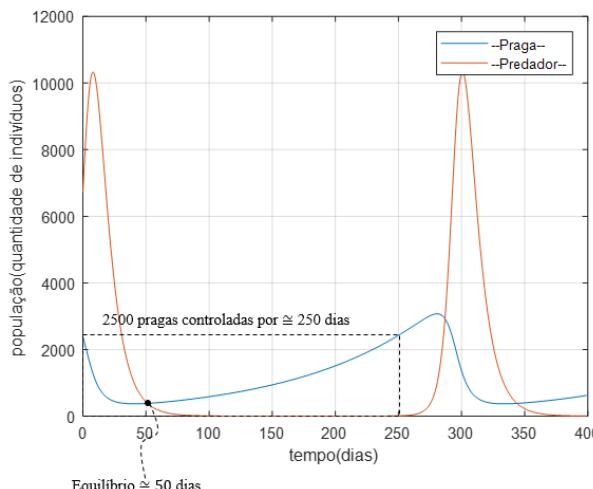
$$\begin{aligned} B(t) &= B_f \cdot B_0 \cdot s \\ B_f \cdot B_0 \cdot s &= B_0 \cdot e^{at} \\ e^{at} &= B_f \cdot s \Rightarrow a = \frac{\ln(B_f \cdot s)}{t} \end{aligned}$$

Testou-se diferentes parâmetros para obter as constantes e, dentre todos os cenários testados, aquele que se mostrou mais favorável foi obtido do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = 0,0095B - 0,0000096BV \\ \frac{dV}{dt} = 0,0001BV - 0,1278V \end{cases}$$

As constantes foram determinadas considerando um ciclo de vida de 24 dias para a vespa e 70 dias para a broca-da-cana, onde esta última põe 300 ovos. O gráfico abaixo simula os resultados.

Figura 2 – Gráfico simulando um ciclo de vida de 24 dias para a vespa, 70 dias para a broca-da-cana e 300 ovos



Fonte: JESUS, 2019, p.47

Analizando o gráfico, é possível visualizar que, uma vez que as vespas são inseridas no colmo da cana-de-açúcar, a população de brocas-da-cana começa a cair, enquanto a população das vespas aumenta. Em menos de vinte e cinco dias, as vespas começam a morrer (completando seu ciclo de vida) e, a partir disso, as brocas-da-cana voltam a aumentar lentamente. Com o desaparecimento da população de vespas, as pragas retomam o crescimento natural da sua espécie, até que o ciclo volte a se repetir através da eclosão dos ovos das vespas.

Ainda, as duas populações se equilibram em cerca de cinquenta dias. Por fim, a população da praga fica abaixo de dois mil e quinhentos por cerca de duzentos e cinquenta dias, o que aponta um resultado satisfatório para o controle biológico.

4. CONCLUSÕES

Por meio deste trabalho, buscou-se esclarecer como se dá a modelagem matemática por trás da interação entre vespas e brocas-da-cana no controle biológico desta praga que traz tantos problemas às plantações de canaviais. Foi possível conceber a ideia por trás do modelo Lokta-Volterra e demonstrar seu funcionamento por meio de um exemplo de aplicação.

A construção de trabalhos de pesquisa como este incentiva os alunos que cursam disciplinas que envolvem matemática a estudarem os conceitos trabalhados em aula com profundidade e autonomia, consolidando ainda mais o aprendizado. Portanto, conclui-se embora a pesquisa realizada seja incipiente, este não apenas possibilita uma compreensão maior em torno das Equações Diferenciais envolvidas, mas também expande o saber matemático através da visualização por trás de problemas que envolvem a modelagem matemática.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOMES, J. A; OLIVEIRA, A. L. Eficácia para o combate da broca da cana-de-açúcar. *Revista Interface Tecnológica*, v. 17, n. 1, p. 467-478, 2020.

JESUS, I. **EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA APLICADAS AO CONTROLE BIOLÓGICO DA BROCA DA CANA-DE-AÇÚCAR.** 2019. Tese de Doutorado - Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, Universidade de Uberaba.