A EQUAÇÃO DE ONDA APLICADA A UMA CORDA DE VIOLÃO

GUILHERME NOGUEIRA DA SILVA[1]; DANIELA BUSKE[2]; GUILHERME JANECKE WEYMAR[3]; DOUGLAS DA SILVA LINDEMANN[4]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – gnogueira.mat@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – daniela.buske@ufpel.edu.br*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – guilhermejahnecke@gmail.com*
[4]*Universidade Federal de Pelotas – douglas.lindemann@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A busca por entender as complexidades das vibrações das cordas de violão sempre fascinou tanto músicos quanto físicos. O fenômeno onde certos harmônicos persistem mesmo quando uma corda é levemente tocada em pontos específicos, produzindo tons claros e distintos, desperta curiosidade sobre os princípios físicos subjacentes. Este artigo explora a equação de onda aplicada a uma corda de violão, visando elucidar a mecânica da formação de harmônicos e o intrigante comportamento dessas vibrações.

O estudo das vibrações das cordas de violão não é meramente um exercício matemático abstrato, mas está profundamente enraizado na experimentação física. Em "The Physics of Guitar String Vibrations", Perov, Johnson e Perova-Mello (2016) conduziram experimentos usando o captador magnético de um violão e um osciloscópio digital, aproveitando a Transformada Rápida de Fourier (FFT) para analisar o conteúdo harmônico das ondas estacionárias. Seus achados revelaram que as amplitudes harmônicas são significativamente influenciadas pelo ponto onde a corda é dedilhada, oferecendo insights sobre o timbre resultante do som. Esses resultados experimentais alinham-se de perto com as previsões teóricas derivadas da equação de onda, destacando a relevância prática deste modelo matemático.

Complementando esses achados, o trabalho "Studying and Modeling Guitar Harmonics Using Fourier Analysis" de MAGNES(2019) emprega a análise de Fourier para dissecar o conteúdo harmônico dos acordes de violão. Ao gravar e analisar amostras de áudio com MATLAB, Magnes demonstra como as técnicas de dedilhar e parar afetam a estrutura harmônica. Este estudo enfatiza que mesmo quando uma corda é parada em pontos específicos, certos harmônicos persistem devido à distribuição dos modos vibracionais, um conceito intrinsecamente ligado às condições de contorno da equação de onda.

Com base nesses estudos fundamentais, nossa investigação busca explicar por que parar uma corda de violão em certos pontos permite que alguns harmônicos continuem vibrando. Ao entender o papel da equação de onda nesse fenômeno, podemos desvendar as condições sob as quais esses harmônicos são sustentados. Esta exploração não só satisfaz a curiosidade acadêmica, mas também aprimora as técnicas práticas de tocar violão, oferecendo uma apreciação mais profunda da riqueza harmônica do instrumento.

À medida que mergulhamos nas seções subsequentes, vamos deduzir sistematicamente a equação de onda, aplicá-la ao caso específico de uma corda de violão vibrante e analisar os harmônicos resultantes. Nosso objetivo é proporcionar uma compreensão abrangente de por que certos pontos de parada no braço do violão permitem que harmônicos específicos ressoem, contribuindo para as características sonoras únicas do violão. Por meio desta exploração, visamos unir a física teórica e a prática musical, lançando luz sobre a bela complexidade das vibrações das cordas de violão.

2. METODOLOGIA

Para modelar o comportamento vibracional de uma corda de violão, este trabalho adotou uma série de suposições simplificadoras. Considerou-se que a corda é fixa em suas extremidades (em x = 0 e x = L, sendo L o comprimento da corda) e que sua posição de repouso é uma linha reta. Além disso, o modelo restringe o movimento a pequenas vibrações em um plano bidimensional, descartando movimentos tridimensionais. A única força atuante considerada é a tensão constante da corda, negligenciando outras forças como a gravidade.

A partir destas premissas, a equação de onda foi deduzida utilizando a Segunda Lei de Newton (F = ma) para um segmento infinitesimal da corda. A massa deste segmento é expressa como $\rho\Delta x$, onde ρ é a densidade linear da corda. A aceleração, por sua vez, é representada pela segunda derivada do deslocamento u em relação ao tempo, $\partial^2 u/\partial t^2$. A força resultante (F) sobre este segmento, atuando perpendicularmente ao comprimento da corda, é determinada pelas componentes verticais da tensão (T) nas extremidades do segmento. Dada a suposição de pequenas vibrações, os ângulos de inclinação são considerados muito pequenos, permitindo que a força resultante seja expressa em termos da primeira derivada de u em relação a x ($\partial u/\partial x$). A aplicação da Segunda Lei de Newton, combinada com o limite quando Δx tende a zero, leva à equação de onda clássica:

$$\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\, \partial^2 u/\partial x^2, \text{ onde } c^2 = T/\rho$$

A constante c representa a velocidade da onda na corda e é um fator crucial que determina o tom da nota produzida, visto que o tom aumenta com o incremento da tensão (T) ou a diminuição da densidade linear (ρ) da corda.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A resolução da equação de onda, $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\, \partial^2 u/\partial x^2$, foi realizada utilizando o método de Separação de Variáveis e Séries de Fourier. Para isso, foram estabelecidas condições de contorno e iniciais fundamentais que refletem o comportamento físico da corda de violão. As condições de contorno definem que as extremidades da corda estão fixas, ou seja, o deslocamento u é zero em x = 0 e x = L para todo o tempo t: u(0, t) = 0 e u(L, t) = 0. As condições iniciais descrevem a forma da corda no instante zero (u(x, 0) = f(x)) — como uma forma triangular, por exemplo — e que a velocidade inicial de cada ponto da corda é nula ($\partial u/\partial t$ (x, t) = 0 em t = 0), simulando a corda sendo solta do repouso.

A conclusão da solução dessas condições resultou na seguinte expressão geral para o deslocamento da corda em função da posição x e do tempo t:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_n sen(n\pi x/L) cos(n\pi ct/L)]$$

Esta solução é crucial, pois permite a interpretação física dos resultados obtidos ao desvendar a natureza complexa do som produzido.

A expressão revela que o som percebido de uma corda de violão não é uma frequência simples, mas sim uma superposição de infinitas vibrações. Cada termo na soma representa um harmônico.

O componente sen(nπx/L) descreve os modos de vibração espacial da corda, onde n indica o número do harmônico ou modo de vibração. Esses modos garantem que as condições de contorno (corda fixa nas extremidades) sejam satisfeitas, pois sen(0) e sin(nπ) são sempre zero.

O componente cos(nπct/L) descreve a oscilação temporal de cada um desses modos, com a frequência de oscilação sendo diretamente proporcional a n e à velocidade da onda c.

Os coeficientes μn (coeficientes de Fourier) representam a amplitude de cada harmônico e são determinados pela forma inicial f(x) com que a corda é perturbada. Isso significa que a maneira como a corda é dedilhada (sua condição inicial) influencia quais harmônicos serão mais proeminentes no som final.

Em essência, a linearidade da equação de onda e a validade do princípio da superposição permitiram que a solução geral fosse construída como a soma de soluções particulares. Essa estrutura matemática da solução é o que possibilita a compreensão de como a corda pode vibrar em múltiplas frequências simultaneamente, formando os harmônicos que conferem ao violão sua riqueza sonora e como, ao tocar a corda em pontos específicos (nós), certos harmônicos podem ser suprimidos enquanto outros continuam a vibrar, produzindo tons claros e distintos como podemos observar na figura abaixo:

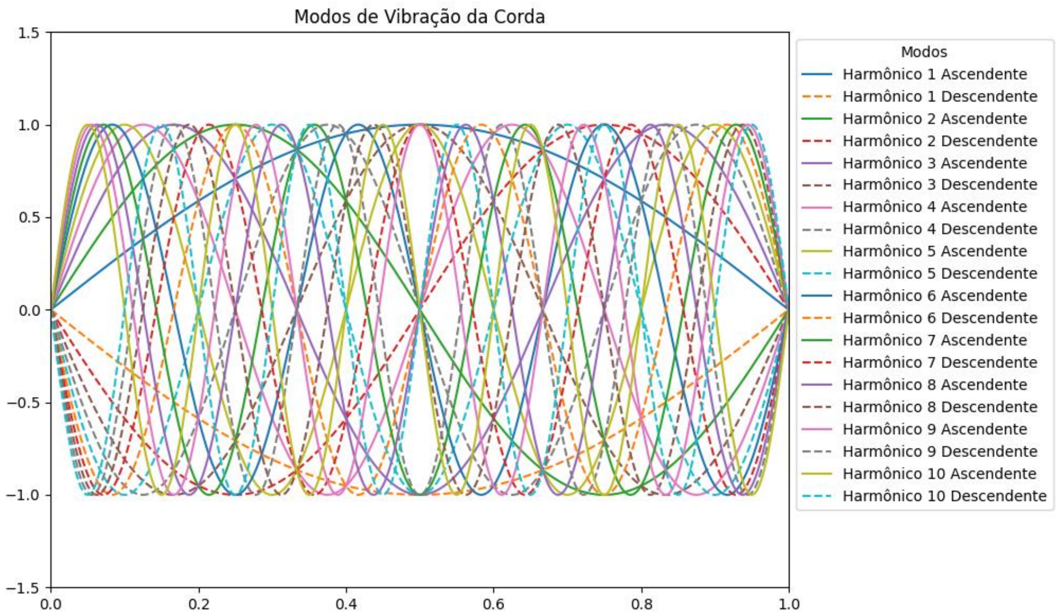

Figura 1: *Representação dos modos de vibração da corda.*

4. CONCLUSÕES

Este estudo explorou o comportamento vibracional de uma corda de violão, empregando a equação de onda como modelo fundamental para a formação dos harmônicos. A resolução dessa equação foi alcançada através do método de Separação de Variáveis e Séries de Fourier, considerando condições de contorno que fixam as extremidades da corda (u(0, t) = 0 e u(L, t) = 0) e condições iniciais que descrevem sua forma no instante zero (u(x, 0) = f(x)) e velocidade inicial nula (∂u/∂t (x, t) = 0 quando t = 0).

A solução analítica geral obtida é crucial, pois revela que o som percebido de uma corda de violão não é uma frequência única, mas sim uma superposição de infinitas vibrações, cada uma contribuindo para a formação dos harmônicos. Esta solução é dada pela expressão:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n sen(n\pi x/L) cos(n\pi ct/L)]$$

Essa estrutura matemática da solução desvenda a natureza complexa do som. Cada termo na soma representa um harmônico, com o componente sin(nπx/L) descrevendo os modos de vibração espacial da corda, e n indicando o número do harmônico. Esses modos garantem que as condições de contorno (corda fixa nas extremidades) sejam satisfeitas, pois sin(0) e sin(nπ) são sempre zero.

O componente cos(nπct/L) descreve a oscilação temporal de cada modo, cuja frequência de oscilação é diretamente proporcional a n e à velocidade da onda c. Os coeficientes An (coeficientes de Fourier) representam a amplitude de cada harmônico e são determinados pela forma inicial f(x) com que a corda é perturbada. A linearidade da equação de onda e a validade do princípio da superposição permitem que a solução geral seja construída como a soma dessas soluções particulares, ilustrando a sobreposição de múltiplas vibrações.

Essa interpretação física é diretamente corroborada pela solução, explicando como a técnica de tocar a corda suavemente em pontos específicos (como nos trastes 5, 7 e 12) resulta na seleção de certos harmônicos e na supressão de outros. Isso ocorre porque esses pontos correspondem a nós ou antinós dos modos de vibração, permitindo que apenas alguns continuem a ressoar, o que explica a formação de tons claros e distintos. Em suma, a modelagem matemática forneceu uma compreensão aprofundada dos princípios físicos subjacentes à produção de som e harmônicos, oferecendo uma base sólida para estudos futuros e para o aprimoramento de técnicas de desempenho musical e design de instrumentos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PEROV, P.; JOHNSON, W.; PEROVA-MELLO, N. The physics of guitar string vibrations. American Journal of Physics, 84(1), 38-43, 2016. DOI: 10.1119/1.4935088.

MAGNES, P. Studying and Modeling Guitar Harmonics Using Fourier Analysis. Modeling and Experimental Tools with Prof. Magnes, 2019. Disponível em: https://pagcs.vassar.edu/magncs/2019/05/17/studying-and-modeling-guitar-harmonics.

DAVIS, M. Guitar Strings as Standing Waves: A Demonstration. Journal of Chemical Education, 84(8), 1287, 2007. Disponível em: https://cric-ed.gov/?id=W17494.

KASHY, E.; JOHNSON, D. A.; MCINTYRE, J.; WOLFE, S. L. Transverse standing waves in a string with free ends. American Journal of Physics, 65(4), 310-313, 1997. Disponível em: https://pubs.aip.org/ajp/article/65/4/310/551956. LOGAN, J. D. Applied Partial Differential Equations. 2. ed. Springer, 2013.