A EXISTÊNCIA DA RAIZ n-ÉSIMA DE UM NÚMERO REAL POSITIVO E UMA APLICAÇÃO NUMÉRICA

CARLOS EDUARDO DOS SANTOS LUCAS[1]; MAURÍCIO BRAGA DE PAULA[2]; ANDREA MORGADO[3]

[1] *Universidade Federal de Pelotas - dudulucas123813@gmail.com*
[2] *Universidade Federal de Pelotas - maubrapa@ufpel.edu.br*
[3] *Universidade Federal de Pelotas - andrea.morgado@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Em cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral, é comum o estudo da função que associa a cada número real x sua potência x^n. Neste contexto, a justificativa para a bijetividade dessa função costuma ser feita por meio da análise gráfica e de argumentos intuitivos. Entretanto, observamos que a prova para a sobrejetividade necessita da existência de um número real determinado a partir de uma certa raiz n-ésima. Neste trabalho, propomos uma abordagem mais rigorosa, atrelando esse estudo a resultados fundamentais da Análise Real, buscando uma fundamentação teórica para a existência e unicidade da raiz n-ésima de um número real positivo através da propriedade que caracteriza o corpo dos números reais como um corpo ordenado completo. Como aplicação da teoria estudada, exploramos, ao final, um método iterativo para aproximar a raiz quadrada de qualquer número natural, com base em uma sequência recursiva cuja construção permite obter aproximações tão precisas quanto se queira.

2. METODOLOGIA

Este trabalho foi desenvolvido a partir do estudo de tópicos clássicos da Análise Real abordados no livro incluído na bibliografia. A pesquisa consistiu na leitura, interpretação e adaptação dos resultados teóricos necessários para desenvolver os objetivos propostos anteriormente.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme mencionado na introdução, essa seção terá dois segmentos. Primeiramente, apresentaremos o principal resultado desse trabalho, o qual nos diz que ao considerarmos um número real positivo a e um número natural qualquer, existe um número real positivo b tal que $b^n = a$. O número b chama-se a *raiz n-ésima de* a e é representado pelo símbolo $b = \sqrt[n]{a}$. Para isso, serão apresentados alguns tópicos necessários para a demonstração. Os conceitos e propriedades dessa seção são releituras de resultados clássicos da literatura, sendo que alguns citaremos sem prova. Esses podem ser encontrados em (LIMA, 2014). Para essa seção, assumiremos que K é um corpo ordenado.

Definição 3.1 (Cotas, Supremo e Ínfimo)**.** *Consideremos X um subconjunto do corpo ordenado K. Dizemos que:*

(i) X é limitado superiormente se existe $b \in K$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$; o elemento b é chamado de cota superior de X.

(ii) Um elemento $s \in K$ é o supremo de X, denotado por $\sup X$, se s é cota superior de X e para todo c pertencente a K, tal que c é cota superior de X, temos $s \leq c$.

(iii) X *é limitado inferiormente se existe* $a \in K$ *tal que* $a \leq x$ *para todo* $x \in X$*; o elemento* a *é chamado de cota inferior de* X*.*

(iv) Um elemento $i \in K$ *é o ínfimo de* X*, denotado por* $\inf X$*, se* i *é cota inferior de* X *e para todo* c *pertencente a* K*, tal que* c *é cota inferior de* X*, temos* $c \leq i$*.*

Definição 3.2 (Corpo Ordenado Completo)**.** *Um corpo ordenado* K *é chamado completo quando todo subconjunto* $X \subset K$*, limitado superiormente, possui supremo em* K*.*

Axioma 1. Existe um corpo ordenado completo, chamado de corpo dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$.

Definição 3.3 (Elemento mínimo e máximo)**.** *Seja* $X \subset K$*. Dizemos que* X *possui elemento mínimo se existe* $a \in X$ *tal que* $a \leq x$ *para todo* $x \in X$*. Analogamente, dizemos que* X *possui elemento máximo se existe* $b \in X$ *tal que* $x \leq b$ *para todo* $x \in X$*.*

Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, pode-se mostrar que se $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ e $a \geq 1$, então $a^n \geq a$. Mais ainda, se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $0 \leq x \leq y$, então $x^n \leq y^n$. Usaremos esses fatos na demonstração do próximo resultado.

Teorema 3.1. *Para quaisquer* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in \mathbb{R}^*_+$*, existe* $b \in \mathbb{R}^*_+$ *tal que* $b^n = a$*.*

Demonstração. Consideremos os conjuntos:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x^n < a\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \wedge y^n > a\}.$$

Como $0 \in X$, concluímos que X é não vazio. Além disso, é limitado superiormente. De fato, se $a < 1$, afirmamos que 1 é uma cota superior de X. Com efeito, suponha que não seja. Então existiria $x \in X$ tal que $1 < x$. Neste caso, teríamos $1^n < x^n$, isto é, $1 < x^n$, o que implica $a < x^n$, o que é absurdo pois $x \in \mathbb{X}$. Analogamente, se $a > 1$, afirmamos que a é uma cota superior de X. De fato, se não fosse, existiria $x \in X$ com $a < x$. Logo, teríamos $a < a^n < x^n$, de modo que $a < x^n$, o que é absurdo pois $x \in \mathbb{X}$. Portanto, X é não vazio e limitado superiormente.

Como $X \subset \mathbb{R}$ e X é não vazio e limitado superiormente, segue do Axioma 1 que X possui um supremo. Seja $b = \sup X$. Vamos mostrar que $b^n = a$. Para isso, basta demonstrar três fatos fundamentais:

A) O conjunto X não possui elemento máximo.

B) O conjunto Y não possui elemento mínimo.

C) Para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, vale $x < y$.

A validade simultânea dos itens (A), (B) e (C) garante que o supremo b de X satisfaz $b^n = a$. De fato, suponha que $b^n < a$. Então $b \in X$, e como b seria o maior elemento de X, isto contradiz (A). Suponha, por outro lado, que $b^n > a$. Então, $b \in Y$, e como Y não tem elemento mínimo, por (B), existiria $c \in Y$ com $c < b$. Porém, por (C), todo $x \in X$ satisfaz $x < c$, de modo que c seria uma cota superior de X menor do que $b = \sup X$, o que é uma contradição. Assim, se houver validade simultânea de (A), (B) e (C), a única possibilidade existente é $b^n = a$.

A seguir, provamos os itens (A), (B) e (C).

A) O conjunto X não possui elemento máximo. Dado $x \in X$ qualquer, provaremos que é possível tomar $d > 0$ tão pequeno que ainda se tenha $(x + d)^n < a$, isto é, $x + d \in X$. Para isto, usaremos um fato auxiliar, que pode ser demonstrado por indução. Trata-se do seguinte: dado $x > 0$, existe, para cada n, um número real positivo A_n (dependendo de x) tal que: $(x + d)^n \leq x^n + A_n \cdot d$, seja qual for d com $0 < d < 1$.

Agora, se $x \in X$, isto é, $x \geq 0$ e $x^n < a$, tomamos d tal que $d < 1$ e $0 < d < \dfrac{a - x^n}{A_n}$. Teremos: $x^n + A_n \cdot d < a$ e, por conseguinte, $(x+d)^n < a$, o que prova que X não possui elemento máximo.

B) O conjunto Y não possui elemento mínimo. De fato, seja $y \in Y$. Escolheremos d, com $0 < d < y$, tal que: $(y-d)^n > a$, isto é, $y - d \in Y$. Para tal, observemos que, sendo $0 < d < y$, temos: $(y-d)^n = y^n\left(1 - \dfrac{d}{y}\right)^n > y^n\left(1 - n \cdot \dfrac{d}{y}\right) = y^n - n \cdot y^{n-1} \cdot d$, onde isso é válido pela Desigualdade de Bernoulli, considerando $x = -\dfrac{d}{y}$ uma vez que $y > 0$ e $\dfrac{-d}{y} > -1$. Se considerarmos $0 < d < \dfrac{y^n - a}{n \cdot y^{n-1}}$, veremos que $y^n - n \cdot y^{n-1} \cdot d$ é maior que a e, portanto, $(y-d)^n > a$. Isto mostra que Y não possui elemento mínimo.

C) Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$. De fato, suponhamos que $y \leq x$, então $y^n \leq x^n < a$ e assim $y^n < a$, o que é absurdo pois $y \in \mathbb{Y}$. (O caso $x = 0$ resulta $x < y$.) $\square$

Pelo que acabamos de demonstrar, dado $n \in \mathbb{N}$, a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^n$ é sobrejetiva. Além disso, se $0 < x < y$, então $0 < x^n < y^n$, o que mostra que f é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Assim, f é uma bijeção. Desse fato, segue a unicidade do elemento b considerado no teorema anterior. Observe que a inversa da função f é dada por $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$, isto é, a raiz n-ésima $y \geq 0$. Como inversa de uma função bijetiva, vemos que nossa função também é bijetiva.

A partir do Teorema (3.1), uma pergunta natural que surge é: como determinar efetivamente o valor de uma raiz n-ésima? Existem diversos métodos numéricos que nos permitem obter aproximações para raízes de números reais. Neste trabalho, como uma aplicação, abordaremos o método das aproximações sucessivas, que nos permite calcular aproximações para a raiz quadrada de um número natural através da construção de uma sequência que converge para o valor desejado.

Definição 3.4 (Sequência e Limite de sequência)**.** *Uma sequência (x_n) de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde denotamos $x(n) = x_n$. Dizemos que (x_n) converge para $a \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim x_n = a$, se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$.*

Proposição 3.1. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes de números reais e $k \in \mathbb{R}$ um número qualquer. Se $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$, então:*

(i) $\lim(x_n + y_n) = L + M$;

(ii) $\lim(kx_n) = kL$;

(iii) $\lim(x_n y_n) = LM$;

(iv) Se $M \neq 0$, *então* $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{L}{M}$.

Proposição 3.2. *Seja $0 \leq \lambda < 1$. Consideremos (x_n) uma sequência tal que:*

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Então (x_n) é uma sequência convergente.

Como uma aplicação do resultado anterior, considere um número real $a > 0$ e defina a sequência (x_n) considerando $x_1 = c$, onde c é um número real positivo arbitrário, e pondo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{2}$$

Vamos mostrar que a sequência (x_n) definida dessa maneira satisfaz a condição (1) e, portanto, converge.

Observemos que se $b = \lim x_n$ e $b \neq 0$, então $b = \sqrt{a}$. De fato, fazendo $n \to \infty$ em (2) e usando as propriedades de limite de sequência dadas na Proposição (3.1), obtemos: $b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)$, ou seja, $b = \frac{a}{b}$, e, portanto, $b^2 = a$

Retornando a sequência (x_n), para todo $x > 0$, tem-se: $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$.

Disso segue que para todo $n > 1$, temos $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Portanto,

$$x_n \cdot x_{n+1} > \frac{a}{2} \iff \frac{a}{2 \cdot x_n \cdot x_{n+1}} < 1. \tag{3}$$

Usaremos (3) para mostrar que a sequência (x_n) cumpre a Proposição (3.2). De fato, $x_{n+2} - x_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2x_n \cdot x_{n+1}}\right)(x_{n+1} - x_n)$. Como $0 < \frac{a}{2x_n \cdot x_{n+1}} < 1$, temos que: $0 < \left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2 \cdot x_n \cdot x_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}$, então: $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|,$ para todo $n > 1,$ o que mostra que a sequência satisfaz a condição (1) com $\lambda = \frac{1}{2}$, e por isso é convergente.

Assim, existe $b = \lim x_n$ e, como $x_n \geq \sqrt{\frac{a}{2}}$ para todo $n > 1$, teremos $b \neq 0$. A fórmula de recorrência (2), fornece, portanto, aproximações sucessivas para $\sqrt{a}$.

Exemplo 3.1 ($\sqrt{400}$)**.**

Tomemos $c = 50$, teremos:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(50 + \frac{400}{50}\right) = 29 \quad x_3 = \frac{1}{2}\left(29 + \frac{400}{29}\right) \approx 21,39 \quad x_4 = \frac{1}{2}\left(21.39 + \frac{400}{21.39}\right) \approx 20,04$$

ou seja, a sequência irá nos fornecer aproximações de 20, que é a raíz quadrada de 400.

4. CONCLUSÕES

Ao abordar a bijetividade da função $f(x) = x^n$, este trabalho promoveu uma transição entre os argumentos intuitivos normalmente utilizados em cursos introdutórios de Cálculo e a linguagem formal da Análise Real. Note que, uma vez garantida a existência e unicidade da raiz n-ésima, fará sentido, na resolução de variados problemas matemáticos, encontrar seu valor. Entretanto, esse processo pode não ser trivial. Isso ocorre, em muitos casos, porque a raiz não é exata, tornando-se necessário encontrar aproximações dela. Nesse contexto, nos restringindo a raízes quadradas de números naturais, exploramos uma construção iterativa fundamentada em propriedades de sequências convergentes, que nos permite obter aproximações tão precisas quanto se queira.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol.1**. 12. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.