

SOBRE A CONDUÇÃO EFETIVA EM UM MEIO MICRO-HETEROGÊNEO UNIDIMENSIONAL COM GRADAÇÃO FUNCIONAL NÃO PERIÓDICA

FELIPE M. MENDES BARBOSA¹; DOUGLAS M. DA SILVA²;
LESLIE D. PÉREZ-FERNÁNDEZ³; JULIÁN BRAVO-CASTILLERO⁴

¹Universidade Federal de Pelotas – barbosa.felipe@ufpel.edu.br

²Universidade Federal do Rio Grande do Sul – doumach99@gmail.com

³Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

⁴Universidad Nacional Autónoma de México – julian@mym.iimas.unam.mx

1. INTRODUÇÃO

Meios micro-heterogêneos apresentam separação de escalas estruturais (caracterizada por um parâmetro geométrico pequeno) e continuidade da matéria na microescala (hipótese do contínuo). Como consequência, as propriedades físicas desses meios variam rapidamente, mas para eles também se cumpre a hipótese de homogeneidade equivalente que garante a existência de um meio homogêneo ideal com propriedades de variação lenta (idealmente constantes) que são, de fato, as propriedades efetivas do meio micro-heterogêneo ao qual equivale esse meio homogêneo (PANASENKO, 2008). O processo de obtenção tal meio homogêneo equivalente é chamado de homogeneização. Métodos tradicionais de homogeneização matemática assumem que a microestrutura dos meios heterogêneos cujos modelos pretendem resolver é periódica. De fato, uma abordagem comum no estudo de meios heterogêneos com microestrutura aleatória é sua aproximação via a repetição periódica de um elemento representativo de volume. Alternativamente, para homogeneizar meios micro-heterogêneos não periódicos pode-se empregar o método de dois espaços de Keller de homogeneização assintótica não periódica (KELLER, 1977; KELLER, 1980).

2. METODOLOGIA

Seja $\varepsilon > 0$ um parâmetro pequeno. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de contorno que modela a condução efetiva de uma certa grandeza física em um meio micro-heterogêneo unidimensional funcionalmente gradado: encontrar a densidade/concentração da grandeza conduzida $u^\varepsilon \in ([0,1] \times \mathbb{R}_+)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] = f^\varepsilon(x, t), & (x, t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+^*, \\ u^\varepsilon(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, & t \in \mathbb{R}_+^*, \quad u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0,1]. \end{cases} \quad (1)$$

em que a condutividade do meio $\kappa^\varepsilon \in C^1([0,1])$, $\kappa^\varepsilon(x) = \kappa(x, x/\varepsilon)$ sendo que $\kappa \in C^1([0,1] \times [0,1/\varepsilon])$ é limitado e positivo; $f^\varepsilon \in C^0([0,1] \times \mathbb{R}_+)$, $f^\varepsilon(x, t) = f(x, x/\varepsilon, t)$ com $f \in C^0([0,1] \times [0,1/\varepsilon] \times \mathbb{R}_+)$, representa a evolução da distribuição de fontes/sumidouros da grandeza difundida; e a distribuição inicial da densidade $u_0 \in C^2([0,1])$ é tal que $u_0(0) = 0$ e $u_0'(1) = 0$. Note que as condições de contorno (1)_{2,3} representam, respectivamente, que na extremidade inicial $x = 0$ do meio nunca há grandeza a difundir e na extremidade final $x = 1$ o meio está isolado.

Sejam $v^\varepsilon(x, s) = L[u^\varepsilon(x, t)]$ e $g^\varepsilon(x, s) = L[f^\varepsilon(x, t)]$ com $g^\varepsilon(x, s) = g(x, x/\varepsilon, s)$, em que $L[\cdot]$ é a transformada de Laplace. Logo, de aplicar $L[\cdot]$ no problema (1) e

tratando a variável s do espaço de Laplace como um parâmetro para as derivadas espaciais serem ordinárias, obtém-se o seguinte problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\kappa^\varepsilon(x) \frac{dv^\varepsilon}{dx} \right] - s v^\varepsilon(x, s) = -(g^\varepsilon(x, s) + u_0(x)), & x \in (0, 1), \\ v^\varepsilon(0, s) = 0, & \frac{dv^\varepsilon}{dx} \Big|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Procura-se uma solução assintótica formal (SAF) do problema (2) como

$$v(x, s) \sim v_0(x, y, s) + \varepsilon v_1(x, y, s) + \varepsilon^2 v_2(x, y, s), \quad (3)$$

em que $y = x/\varepsilon \in [0, 1/\varepsilon]$ é a chamada variável local. Logo, $\kappa^\varepsilon(x) = k(x, y)$ e $g^\varepsilon(x, s) = g(x, y, s)$, e os coeficientes desconhecidos $v_k(\cdot, \cdot, s) \in C^2([0, 1] \times [0, 1/\varepsilon])$, $k = 0, 1, 2$, e suas derivadas de primeira ordem são funções limitadas para cada valor do parâmetro s . De substituir (3) em (2) e agrupar por potências de ε , tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} D_{yy} v_0 + \varepsilon^{-1} (D_{yy} v_1 + D_{yx} v_0 + D_{xy} v_0) \\ + \varepsilon^0 (D_{yy} v_2 + (D_{yx} + D_{xy}) v_1 + D_{xx} v_0 - s v_0(x, y, s) + h(x, y, s)) = \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4)$$

em que $D_{\alpha\beta}(\cdot)$, $\alpha, \beta \in \{x, y\}$, são os operadores diferenciais lineares definidos por

$$D_{\alpha\beta}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\kappa(x, y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \beta} \right],$$

e $h(x, y, s) = g(x, y, s) + u_0(x)$ e $\mathcal{O}(\varepsilon)$ reúne os termos das potências positivas de ε , os quais tendem para 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Para (4) ser satisfeita quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, os coeficientes das potências não positivas de ε anular-se, o qual produz a seguinte recorrência de equações diferenciais para $v_k(x, y, s)$, $k \in \{0, 1, 2\}$:

$$\varepsilon^{-2}: D_{yy} v_0 = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon^{-1}: D_{yy} v_1 + D_{yx} v_0 + D_{xy} v_0 = 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon^0: D_{yy} v_2 + D_{yx} v_1 + D_{xy} v_1 + D_{xx} v_0 - s v_0(x, y, s) + h(x, y, s) = 0. \quad (7)$$

De integrar (5) em $(y_0, y) \subset (0, 1/\varepsilon)$ com extremidade final variável, isolar $\partial v_0 / \partial y$ e aplica o operador do valor médio em relação a escala local definido por

$$\langle \cdot \rangle = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y (\cdot)(y') dy',$$

resulta que o primeiro termo da SAF não depende de y : $v_0(x, y, s) = w_0(x, s)$. De atualizar (6) tem-se que $D_{yy} v_1 + (\partial \kappa / \partial y) w_0' = 0$, a qual é submetida a um processo similar ao descrito para (5) resultando no coeficiente da condução efetiva dada por

$$\hat{\kappa}(x) = \left\langle \frac{1}{\kappa(x, y)} \right\rangle^{-1}, \quad (8)$$

e que o segundo termo da SAF é da forma $v_1(x, y) = l_1(x, y) w_0'$, em que $l_1(x, y)$ é a solução de média nula da equação local $D_{yy} l_1 + \partial \kappa / \partial y = 0$ dada por

$$l_1(x, y) = \hat{\kappa}(x) \int_0^y \frac{dy'}{\kappa(x, y')} - y. \quad (9)$$

Por fim, de atualizar (7) e seguir o mesmo procedimento seguido acima, obtêm-se a equação homogeneizada $[\hat{\kappa}(x)w_0']' - sw_0(x, s) = -\hat{h}(x, s)$, em que $\hat{h}(x, s) = \langle h(x, y, s) \rangle$, a qual, junto com as condições para $w_0(x, s)$ obtidas de substituir a SAF (3) nas condições (2)_{2,3}, formam o problema homogeneizado,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\hat{\kappa}(x) \frac{dw_0}{dx} \right] - sw_0(x, s) = -\hat{h}(x, s), & x \in (0, 1), \\ w_0(0, s) = 0, & \frac{dw_0}{dx} \Big|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Logo, a solução $v^\varepsilon(x, s)$ pode ser aproximada pela SAF

$$v^\varepsilon(x, s) \sim w_0(x, s) + \varepsilon l_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dw_0}{dx}, \quad (11)$$

de maneira que $v^\varepsilon(x, s) - w_0(x, s) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ na norma de $C([0, 1])$ para cada s , ou seja, a solução $w_0(x, s)$ do problema homogeneizado (10) é uma boa aproximação da solução $v^\varepsilon(x, s)$ do problema (2) para ε suficientemente pequeno.

Portanto, basta aplicar a transformada de Laplace inversa $L^{-1}[\cdot]$ à SAF (11) para obter uma SAF da solução $u^\varepsilon(x, t)$ do problema original (1) como

$$u^\varepsilon(x, t) = L^{-1}[v^\varepsilon(x, s)] \sim u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = u^0(x, t) + \varepsilon l_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad (12)$$

com $u^0(x, t) = L^{-1}[w_0(x, s)]$ e $u^\varepsilon(x, t) - u^0(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ na norma de $C([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere o problema (1) com fonte $f^\varepsilon(x, t) = e^{-t}$ e coeficiente de condutividade $\kappa^\varepsilon(x) = 1 + 2^{-2} \sin(2\pi x/\varepsilon)$ e substitua a condição de Neumann por uma condição de Dirichlet homogênea. Assim, a condutividade efetiva é a constante $\hat{\kappa} = 15/4$, e $u^0(x, t)$ pode ser calculado analiticamente como

$$u^0(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(e^t - e^{-(2n-1)^2 \pi^2 \hat{\kappa} t}) \sin[(2n-1)\pi x]}{(2n-1)((2n-1)^2 \pi^2 \hat{\kappa} - 1)}, \quad (13)$$

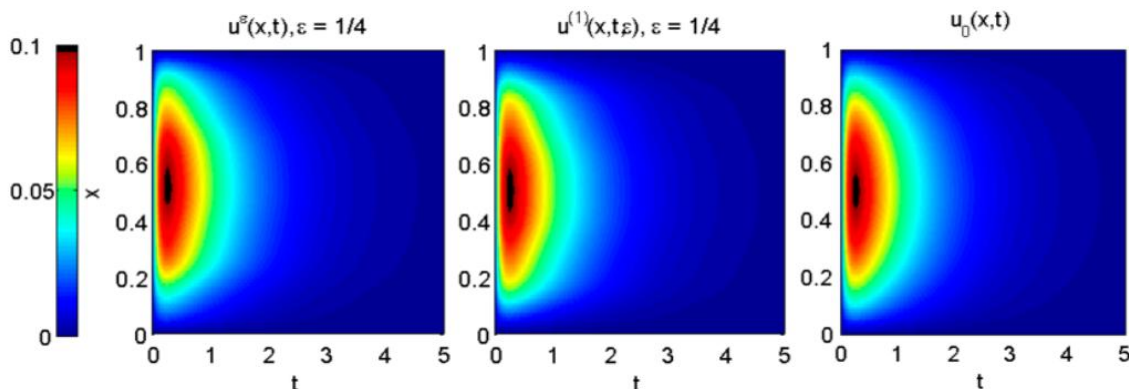
assim como a função local $l_1(y)$ dada pela extensão periódica a $(0, 1/\varepsilon)$ de

$$l_1(y) = \begin{cases} l(y), & y \in [0, 0.5) \\ 0, & y = 0.5 \\ l(y) + 1, & y \in (0.5, 1] \end{cases}, \quad (14)$$

em que $l(y) = \pi^{-1} \arctan[5^{-1} \tan(\pi y)] - y$, de maneira que a SAF (12) pode ser totalmente obtida. Além disso, a solução $u^\varepsilon(x, t)$ do problema (1) é obtida resolvendo o problema (2) via diferenças finitas e calculando a transformada de Laplace inversa pelo algoritmo Talbot-fixado (ABATE; VALKÓ, 2004).

A Figura 1 mostra o comportamento da solução exata $u^\varepsilon(x, t)$, a SAF $u^{(1)}(x, t, \varepsilon)$ e a solução homogeneizada $u^0(x, t)$ para $\varepsilon = 1/4$. Observa-se que $u^{(1)}(x, t, \varepsilon)$ aproximam bem $u^\varepsilon(x, t)$, mas $u^{(1)}$ consegue reproduzir os detalhes locais de u^ε . Ainda, do ponto de vista computacional, o fato de $u^0(x, t)$ e $u^{(1)}(x, t, \varepsilon)$ terem sido obtidos analiticamente faz com que seus cálculos ocorram em segundos. Em contraste, o cálculo de $u^\varepsilon(x, t)$ requer várias horas de tempo computacional, pois precisa de uma discretização muito fina do domínio para capturar as oscilações rápidas oriundas da dependência de ε .

Figura 1 – Comportamento de $u^\varepsilon(x, t)$, $u^{(1)}(x, t, \varepsilon)$ e $u^0(x, t)$ para $\varepsilon = 1/4$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

4. CONCLUSÕES

Foi estudada uma família paramétrica de problemas de valores iniciais e de contorno para a equação da condução não homogênea com coeficiente continuamente diferenciável rapidamente oscilante não periódico. A abordagem combinou a transformada de Laplace com o método de dois espaços de Keller de homogeneização assintótica não periódica. O problema homogeneizado foi obtido como limite da sequência de problemas resultante de fazer o parâmetro tender a zero. Foi ilustrado que a solução do problema homogeneizado e a SAF são boas aproximações da solução exata do problema genérico da família quando o valor do parâmetro é suficientemente pequeno. Ainda, tais aproximações são de rápida aferição computacional em contraste com a solução exata.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KELLER, J.B. Effective behavior of heterogeneous media. In: **SYMPOSIUM ON STATISTICAL MECHANICS AND STATISTICAL METHODS IN THEORY AND APPLICATIONS**. New York: Plenum Press, 1977. p. 631-644.

KELLER, J.B. Darcy's law for flow in porous media and the two-space method. In: **Nonlinear Partial Equations in Engineering and Applied Science**. New York: Dekker, 1980. p. 429-443.

PANASENKO, G.P. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale. **Physics of Atomic Nuclei**, v. 71, n. 4, p. 681-694, 2008.

ABATE, J.; VALKÓ, P.P. Multi-precision Laplace transform inversion. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 60, n. 5, p. 979-993, 2004.