ASPECTOS TOPOLÓGICOS NA TEORIA DOS MONOPOLOS MAGNÉTICOS

PABLO RODRIGUES[1]; WERNER SAUTER[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – pablo.carlos@hotmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – werner.sauter@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Na teoria dos monopolos magnéticos, proposta por WU; YANG (1975-76), reformula-se a interpretação do campo eletromagnético sob a ótica matemática. Essa abordagem está alicerçada na topologia do campo, tratado como uma variedade diferenciável, associando propriedades físicas a invariantes topológicos do sistema. Um exemplo central é a homotopia entre a esfera S^{n-1} e o espaço $\mathbb{R}^n/\{0\}$, a qual fundamenta a quantização topológica da carga magnética.

Essa estrutura topológica se manifesta no espaço parametrizado como uma esfera ao redor do monopolo, que é divido nos hemisférios norte e sul, cada um dotado de um potencial vetor distinto: $\boldsymbol{A}^N$ e $\boldsymbol{A}^S$. Na região equatorial (encontro dos hemisférios), descrita pela circunferência S^1, há uma transformação de calibre que conecta os potenciais vetores: $\boldsymbol{A}^N = \boldsymbol{A}^S + \nabla\, \Lambda\,(\phi)$. Para uma partícula dotada de carga e que circula o laço equatorial S^1, há a indução de um fator de fase não integrável $\mathrm{e}^{ie\,\Lambda(\phi)/\hbar}$ em sua função de onda, que é reflexo da ação quântica $\mathrm{e}^{iS/\hbar}$ e garante a invariância da lagrangiana de interação.

A conciliação entre a física e a topologia do sistema completa-se no mapeamento $g\,(\phi) = \mathrm{e}^{ie\,\Lambda(\phi)/\hbar}$, que define uma homotopia de mapas $S^1 \to U\,(1)$. O número de enrolamento $k \in \mathbb{Z}$, que classifica tanto o grupo de homotopia $\pi_1\,(U\,(1))$ quanto as classes de homotopia $S^1 \to U\,(1)$, quantiza o fluxo magnético através da esfera S^2. Assim, a lei de Gauss aplicada à esfera recupera a quantização de Dirac $eg = k\,\hbar/2$, onde há uma assimilação da carga magnética como um invariante topológico provindo da geometria global do espaço.

2. METODOLOGIA

O trabalho foi realizado através de uma revisão bibliográfica, em que foram estudados os artigos de DIRAC (1931), WU-YANG (1975-76) e o livro do SHNIR (2005).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um dos principais aspectos na teoria dos monopolos, é a origem matemática distinta dos campos vetoriais radiais que descrevem o campo elétrico associado a uma carga elétrica e o campo magnético associado a um monopolo magnético. Essa distinção se dá como segue:

- O campo elétrico $\boldsymbol{E}$ associado a uma carga elétrica é dito globalmente conservativo, pois deriva de um campo escalar (ou irrotacional): $\boldsymbol{E} = -\nabla\, U$. Esse fato faz o domínio $\mathbb{R}^3/\{0\}$ ser simplesmente conexo, isto é, integrais de linha de $\boldsymbol{E}$ em torno da singularidade $(0, 0, 0)$ são sempre zero, uma vez que podemos contornar a singularidade sem comprometer sua estrutura topológica. Em outras palavras, sempre podemos construir um caminho fechado no domínio que evita a origem ao ser contraído continuamente em um ponto;

- O campo magnético $\boldsymbol{B}$ associado a um monopolo magnético é dito não conservativo globalmente, pois é derivado do rotacional de um potencial vetor singular em $(0, 0, 0)$: $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Isso faz com que a integral de linha de $\boldsymbol{A}$ em torno da singularidade sempre dê diferente de zero. Dessa forma, sempre existirá um caminho fechado no domínio $\mathbb{R}^3/\{0\}$ que não pode ser contraído continuamente em um ponto sem cruzar a singularidade.

A origem estrutural citada acima que distingue esses campos, é a responsável pela distinção topológica desses sistemas físicos. Para o caso do monopolo, definimos dois potenciais vetores que governam separadamente o espaço dividido em dois hemisférios, norte e sul: $\boldsymbol{A}^N$ e $\boldsymbol{A}^S$. A região de sobreposição equatorial equivale ao laço que circula a singularidade do domínio $\mathbb{R}^3/\{0\}$. Além disso, também nessa região, os potenciais vetores relacionam-se por uma transformação de calibre:

$$\boldsymbol{A}^N = \boldsymbol{A}^S - \frac{i}{e} \mathrm{e}^{-\frac{2ieg\,\phi}{\hbar}} \nabla \mathrm{e}^{\frac{2ieg\,\phi}{\hbar}},$$

onde *e* é a carga elétrica, *g* a carga magnética, ϕ uma fase arbitrária e para os potências vetores:

$$\boldsymbol{A}^N = g\,\frac{1-\cos(\theta)}{r\,\mathrm{sen}(\theta)}\,\hat{\mathbf{e}}_\phi \;;\; 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}\;;$$

$$\boldsymbol{A}^S = -\,g\,\frac{1+\cos(\theta)}{r\,\mathrm{sen}(\theta)}\,\hat{\mathbf{e}}_\phi\;;\; \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2} < \theta \le \pi\;.$$

Para uma partícula com carga e que cruza o equador, há o acréscimo de um fator de fase não integrável em sua função de onda:

$$\psi^N = \psi^S \mathrm{e}^{\frac{2ieg\,\phi}{\hbar}}.$$

Esse fator, que corresponde à fase quântica $\mathrm{e}^{iS/\hbar}$ associada à ação *S* da partícula, garante a invariância da lagrangiana sob transições entre hemisférios. É aqui que reside a ponte com a topologia, pois a função de transição $g(\phi) = \mathrm{e}^{\frac{2ieg\,\phi}{\hbar}}$ define um mapeamento contínuo do equador S^1 (laço de sobreposição) no grupo de calibre $U(1)$:

$$g: S^1 \;\rightarrow\; U(1);\; g(\phi) = \mathrm{e}^{ik\phi} \;\propto\; \mathrm{e}^{\frac{2ieg\,\phi}{\hbar}},$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ chama-se número de enrolamento, sendo expresso analiticamente por:

$$k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{S^1} g^{-1}\frac{dg}{d\phi}\,d\phi.$$

Dizemos que k quantiza o fluxo magnético através da esfera S^2. Assim, usando o teorema de Stokes:

$$\oint_{S^2} \boldsymbol{B} \cdot d\,\boldsymbol{a} = \oint_{S^1} \left(\boldsymbol{A}^N - \boldsymbol{A}^S\right) \cdot d\,\boldsymbol{l} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} g^{-1} \frac{d\,g}{d\,\phi}\, d\,\phi = k =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} g^{-1}\, dg = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2\,ieg}{\hbar}\, d\,\phi = \frac{2\,eg}{\hbar} \quad \rightarrow \quad eg = \frac{k\,\hbar}{2},$$

obtemos a quantização de Dirac.

A equivalência homotópica entre o espaço físico $\mathbb{R}^3/\{0\}$ e a esfera S^2 completa a topologia global do monopolo:

$$\mathbb{R}^3/\{0\} \simeq S^2.$$

Essa equivalência surge porque podemos deformar continuamente o espaço $\mathbb{R}^3/\{0\}$ em S^2 via normalização radial:

$$r \quad \rightarrow \quad \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \ \vec{r} \in \mathbb{R}^3/\{0\}.$$

Além disso, a função de transição $g\,(\phi)$ atua no equador $S^1 \subset S^2$, e a homotopia do mapa $S^1 \rightarrow U\,(1)$ torna-se o mecanismo para quantizar a carga magnética como um invariante topológico.

4. CONCLUSÕES

A descrição topológica do monopolo magnético revela que a quantização da carga surge em virtude das restrições geométricas globais do sistema, não de detalhes dinâmicos. A impossibilidade de definir um potencial vetor único em $\mathbb{R}^3/\{0\} \simeq S^2$ exige a introdução de uma função de transição $g(\phi)=\mathrm{e}^{ik\phi}$ que conecta, no equador, os dois potências vetores responsáveis pelos hemisférios norte e sul. Além disso, o número de enrolamento $k \in \mathbb{Z}$ - determinado pelo mapa $S^1 \rightarrow U\,(1)$ - impõe diretamente a quantização $eg = k\,\hbar/2$. Essa abordagem unifica a fase quântica $\mathrm{e}^{iS/\hbar}$ à geometria do espaço, mostrando que propriedades físicas podem emergir dos invariantes topológicos do sistema.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DIRAC, P. A. M. Quantized singularities in the electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, London, v. 133, n. 821, p. 60-72, set. 1931. Disponível em: https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0130

WU, T. T.; YANG, C. N. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. **Physical Review D**, New York, v. 12, n. 12, p. 3845-3857, dez. 1975. Disponível em: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.12.3845

WU, T. T.; YANG, C. N. Dirac monopole without strings: classical Lagrangian theory. **Physical Review D**, New York, v. 14, n. 2, p. 437-445, jul. 1976. Disponível em: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.437

SHNIR, Y. M. **Magnetic monopoles**. Berlin: Springer, 2005. 532 p. ISBN 978-3-540-25277-1