

MODELANDO ESTRELAS POLITRÓPICAS ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DE LANE-EMDEN: UM ESTUDO DO SOL

MARUAN SILVA DOS SANTOS¹; RAFAEL CAVAGNOLI²

¹*Universidade Federal de Pelotas – maruan.santos@ufpel.edu.br*

²*Universidade Federal de Pelotas – rafael.cavagnoli@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A evolução estelar é uma das mais instigantes áreas de pesquisa na astrofísica moderna e compreender como as estrelas nascem e se extinguem é essencial para decifrar parte da história e da estrutura do universo. O nascimento de uma estrela é um processo complexo que começa em nuvens gigantes de gás e poeira no espaço, chamadas de nebulosas. Inicialmente a nebulosa está em equilíbrio, mas quando sofre perturbações (que podem ser desencadeadas por colisões entre nuvens de gás ou outros fatores na região) ela se torna instável e então inicia-se, a partir da ação gravitacional, o processo que originará uma estrela. Com o passar do tempo essa nuvem vai se densificando através da auto-gravitação, esse processo começa na região central da nuvem. Essa formação inicial no centro da nebulosa é chamada de protoestrela (ALMEIDA, 2009; SOBRINHO, 2013).

A protoestrela não é considerada uma estrela, pois está em fase de formação. Neste estágio, ainda não estão ocorrendo as reações nucleares. A protoestrela aquece de forma gradual, passando-se milhares de anos de aquecimento até que se atinjam temperaturas entre 2000 K a 3000 K. Com o decorrer do tempo, a protoestrela eleva cada vez mais sua temperatura, e ao atingir $T \sim 10^7$ K (HORVATH, 2020), tem início a fusão nuclear de hidrogênio em hélio e a protoestrela torna-se capaz de equilibrar momentaneamente a contração gravitacional, atingindo assim um estado de equilíbrio, pois através deste tipo de reação é liberada grande quantidade de energia. Uma vez acesa a “fornalha nuclear” a protoestrela passa então a ser considerada uma estrela, adentrando em um longo ciclo realizando sucessivas reações de fusão nuclear na busca pela manutenção do equilíbrio hidrostático em seu interior. É através da fusão nuclear que diversos elementos químicos são produzidos no interior de uma estrela.

Este trabalho apresenta a resolução numérica da equação de Lane-Emden para um índice politrópico $n = 3$, a fim de modelar a estrutura interna do Sol e estrelas análogas. Foram calculados os perfis de densidade, temperatura, pressão e massa acumulada em função do raio da estrela.

2. METODOLOGIA

O modelo politrópico é uma ferramenta usada para descrever a estrutura interna de estrelas em equilíbrio hidrostático, e o presente estudo limitou-se ao âmbito da gravitação newtoniana, considerando ainda que o gás em seu interior comporta-se como um gás ideal clássico. Neste trabalho, resolvemos numericamente a equação de Lane-Emden (FOWLER, 1931) para diferentes

valores do índice politrópico n , verificando-se que $n = 3$ fornece uma aproximação razoável para estrelas como o Sol. A equação de Lane-Emden é dada por:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0, \quad (1)$$

sendo ξ a variável radial adimensional, $\theta(\xi)$ a densidade normalizada e n o índice politrópico. Esta equação diferencial não-linear de segunda ordem possui soluções analíticas apenas para valores específicos de n (0, 1 e 5), exigindo métodos numéricos para casos gerais, como $n = 3$, caso de interesse neste trabalho. Outros valores de n foram investigados não se adequando a estrelas tipo o Sol, pois geram resultados com pouca aplicação prática como objetos com densidade constante, linear, além de densidades centrais e/ou raios tendendo a infinito ($n \geq 5$), dentre outras questões.

A integração numérica foi realizada através de um código escrito em linguagem Fortran, utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (VALLE, 2012), combinando ainda o resultado da equação de Lane-Emden com a equação de estado para um gás ideal, obtemos os perfis de densidade (ρ), pressão (P), temperatura (T) e massa acumulada (M) em função do raio (r). Vale notar que a equação de Lane-Emden é uma ferramenta essencial para modelos teóricos simplificados e serve como base para abordagens mais complexas da estrutura estelar.

Para converter os resultados adimensionais em unidades físicas, utilizamos as seguintes relações:

$$r = \xi\alpha, \quad \rho(r) = \rho_c\theta^n, \quad P(r) = K\rho^{1+1/n}, \quad T(r) \propto \frac{P}{\rho}, \quad M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr',$$

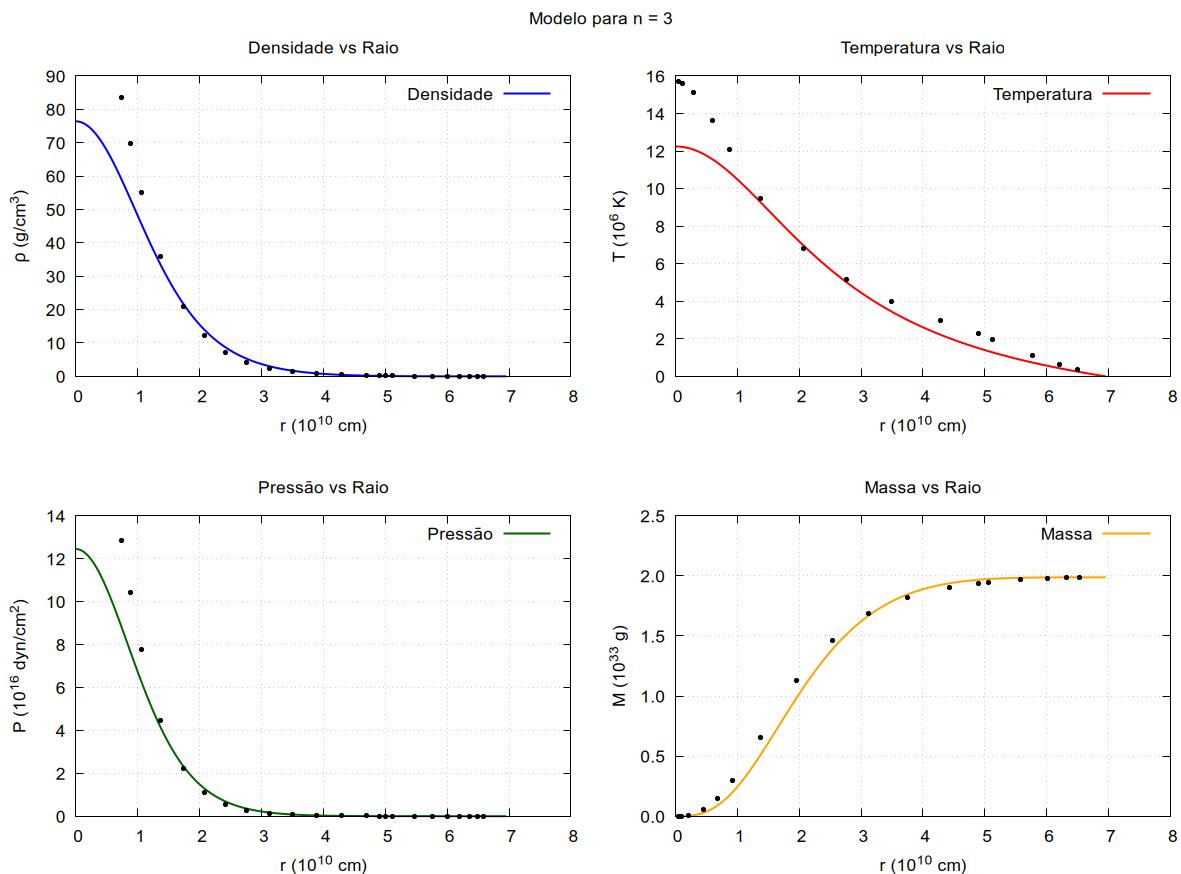
onde α , ρ_c e K são constantes de escala determinadas para alinhar o modelo com as propriedades solares. Os valores numéricos foram calibrados para que o modelo atingisse o raio e a massa do Sol, isto é, $R_\odot \approx 6.96 \times 10^{10}$ cm e $M_\odot \approx 1.99 \times 10^{33}$ g, garantindo consistência com dados solares.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os perfis obtidos foram traçados em função do raio usando o software Gnuplot, gerando gráficos de densidade, temperatura, pressão e massa acumulada (Figura 1) expressos nas unidades de medida usuais em Astrofísica [ρ (g/cm³), T (K), P (dyn/cm²), M (g)]. Os resultados foram comparados com Modelo Solar Padrão (BAHCALL et al., 2001), um modelo fenomenológico e sofisticado construído com dados solares, a partir do qual é possível avaliar o cálculo efetuado através do modelo politrópico simplificado usado neste trabalho.

Os resultados obtidos mostram que o modelo politrópico reproduz de maneira geral a estrutura do Sol. Isso evidencia que, apesar das simplificações adotadas, o modelo politrópico é uma ferramenta útil para descrever a estrutura estelar de forma aproximada.

Figura 1: Gráficos de densidade, temperatura, pressão e massa acumulada em função do raio, comparando o modelo politrópico ($n = 3$) com dados do Modelo Solar Padrão (pontos escuros).



Fonte: Autor (2025).

Entretanto, observa-se que para valores de raio menores, próximos ao centro da estrela, as curvas politrópicas passam a diferir dos dados do Modelo Solar Padrão. Esse desvio ocorre porque no centro da estrela há processos físicos complexos que não são contemplados no modelo politrópico, como variações locais de composição química em função das reações nucleares, transporte de energia por radiação e principalmente por convecção (MACIEL, 1999). Desta forma, a simplificação assumida pelo modelo estudado neste trabalho resulta em discrepâncias na parte central da estrela, mas à medida que nos afastamos do centro a concordância com modelos mais sofisticados melhora significativamente.

Com efeito, o modelo politrópico, embora limitado, captura a essência da estrutura interna de estrelas análogas ao Sol e permite identificar regiões onde o comportamento de um gás ideal pode ser utilizado. Modelos simplificados são importantes pois auxiliam na introdução ao estudo da Astrofísica estelar.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi possível verificar que o modelo politrópico com $n = 3$, na equação de Lane-Emden, fornece uma representação simplificada, porém eficaz, da estrutura interna do Sol e estrelas análogas. A comparação com os dados do Modelo Solar Padrão mostrou que os perfis de densidade, temperatura, pressão e massa acumulada do modelo politrópico estão em boa concordância com os valores observados no Modelo Padrão Solar, com apenas algumas discrepâncias devido às limitações do modelo politrópico.

O modelo apresentado mostra-se satisfatório para estudos estelares, e pode ser aprimorado com a inclusão de outros fenômenos que ocorrem no interior das estrelas, além de correções relativísticas, dadas as limitações da gravitação newtoniana. Tais melhorias permitiriam uma representação mais precisa do Sol, especialmente em regiões próximas ao seu centro, além de outros tipos de estrelas, como as anãs brancas. Este trabalho destaca a importância da equação de Lane-Emden como uma ferramenta inicial para modelagem estelar e abre caminho para abordagens mais sofisticadas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, L. G. **Evolução Estelar e Equação de Estado de Objetos Densos.** 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Astronomia) - Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- BAHCALL, J. N.; PINSONNEAULT, M. H.; BASU, S. **The Astrophysical Journal**, v. 555, n. 2, p. 990-1012, 2001. Dados do Modelo Solar Padrão (BP2000): Acessado em 05 jul. 2025. Disponível em: <https://www.sns.ias.edu/~jnb/SNdata/sndata.html>.
- FOWLER, R. H. **Further studies of Emden's and similar differential equations.** The Quarterly Journal of Mathematics, v. os-2, n. 1, p. 259–288, 1931.
- HORVATH, J.E., **Astrofísica de Altas Energias: uma Première**, São Paulo: EDUSP, 2020.
- MACIEL, W. J. **Introdução à estrutura e evolução estelar.** São Paulo: Edusp, 1999.
- SOBRINHO, J. L. G. **Estrelas: origem, evolução e morte.** Madeira: Grupo de Astronomia da Universidade da Madeira, 2013.
- VALLE, K. N. F. **Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta.** 2012. 40f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo, Universidade Federal de Minas Gerais.