UM ESTUDO ACERCA DOS ESPAÇOS UNIFORMEMENTE SUAVES E UNIFORMEMENTE CONVEXOS

LUIZ FELIPE PEREIRA BANDEIRA[1]; ALEXANDRE MOLTER[2] MAURICIO ZAHN[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – lfpbandeira@inf.ufpel.edu.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@ufpel.edu.br*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – mauricio.zahn@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A noção de espaços uniformemente convexos foi introduzida por James A. Clarkson, em 1936, no artigo *Uniformly Convex Spaces*, no qual estabeleceu as desigualdades que hoje levam seu nome e demonstrou, entre outros resultados, que todo espaço uniformemente convexo é reflexivo (CLARKSON, 1936).

O presente trabalho tem como objetivo apresentar as principais propriedades dos espaços uniformemente convexos e uniformemente suaves, destacando, em particular, a dualidade existente entre eles: todo espaço uniformemente convexo possui dual uniformemente suave e, reciprocamente, todo espaço uniformemente suave tem dual uniformemente convexo (FYDRYZEWSKI, 2007).

2. METODOLOGIA

A pesquisa foi desenvolvida por meio de estudo bibliográfico, orientada pelos professores responsáveis, a partir de obras de referência sobre espaços de Banach, com ênfase nos conceitos de convexidade e suavidade uniformes.

Inicialmente, tomou-se como referência principal o trabalho de Rickes (2022), que forneceu a base teórica para o estudo dos espaços uniformemente convexos. Complementarmente, consultou-se o artigo clássico de Clarkson (1936), no qual se introduz a noção de convexidade uniforme, e a dissertação de Fydryzewski (2007), utilizada como suporte para a compreensão dos espaços uniformemente suaves e do módulo de suavidade.

Foram realizadas reuniões semanais de orientação, nas quais foram discutidos os conteúdos estudados, avaliados os avanços alcançados e indicados novos materiais para aprofundamento. Essas discussões conduziram tanto a seleção das fontes consultadas quanto a organização dos resultados apresentados neste trabalho.

3. RESULTADOS

Nesta seção apresentam-se alguns resultados relacionados às propriedades dos espaços uniformemente convexos e uniformemente suaves. Para tanto, introduz-se a seguinte definição.

Temos que um espaço de Banach $(B, \|.\|)$ é uniformemente convexo se, para todo $\varepsilon \in (0, 2]$, existir $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para $x, y \in B$ com $\|x\| = \|y\| = 1$, implica em

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Geometricamente, em um espaço normado, o ponto médio de dois elementos da bola unitária situa-se sempre em seu interior, aproximando-se da fronteira apenas quando a distância entre esses elementos tende a zero (CLARKSON, 1936).

A seguir apresenta-se uma representação da ideia por meio de um exemplo simulado no espaço $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$:

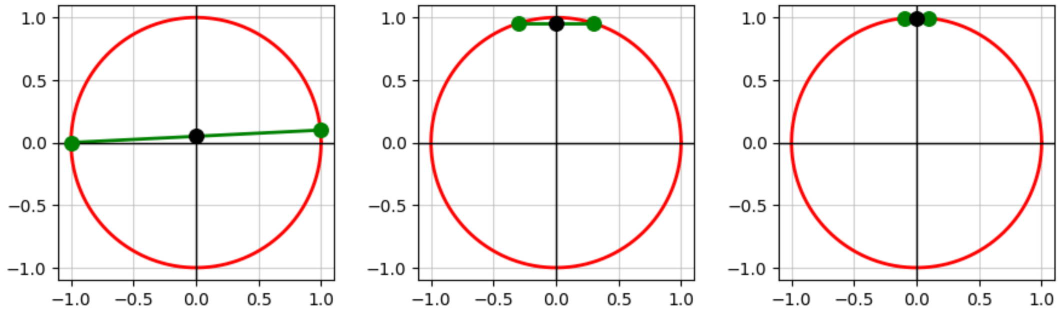

Figura 1: Representação geométrica do ponto médio.

Outra forma de caracterizar esses espaços é por meio da seguinte função $\delta_B : [0,2] \to [0,1]$, denominada *módulo de convexidade*, definida por

$$\delta_B(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B,\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}, \quad \forall \varepsilon \in [0,2].$$

Tal função desempenha um papel central no estudo da convexidade uniforme, pois satisfaz as seguintes propriedades, segundo (RICKES, 2022):

1. δ_B é uma função crescente;
2. B é uniformemente convexo se, e somente se, $\delta_B(\varepsilon)$ é estritamente positivo para todo $\varepsilon > 0$;
3. $\delta_B(0) = 0$.

A partir do que foi definido, introduz-se os espaços uniformemente suaves. tem-se que $(B, \|.\|)$ é dito uniformemente suave se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que, se $x, y \in B$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \leq 2\tau$, implica em

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \varepsilon\tau.$$

Geometricamente, se um espaço é uniformemente suave, sua bola de raio unitário não possui variações abruptas, ou seja a bola de raio unitário, não tem ”quinas”. Para ilustração, apresenta-se a representação geométrica da bola unitária em $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, a qual não é uniformemente suave:

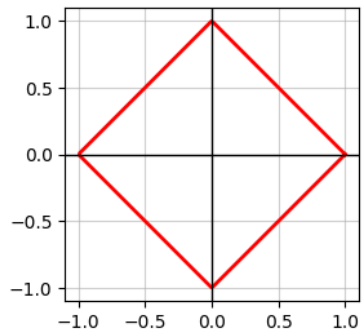

Figura 2: Representação da bola unitária em $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$

Assim como nos espaços uniformemente convexos, pode-se analisar a suavidade uniforme por meio da função

$$S_X(\tau) := \sup\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \leq 2\tau\right\}, \quad \tau \in [0,2].$$

Contudo, essa definição não se adapta à dualidade entre convexidade e suavidade uniformes (FYDRYZEWSKI 2007). Por isso, é utilizada a seguinte função *módulo de suavidade*, que interage melhor com a dualidade:

$$\rho_X : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty), \qquad \rho_X(t) := \sup_{\|x\|=1,\ \|y\|=1}\left(\frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1\right), \quad t \geq 0.$$

Em particular, X é *uniformemente suave* quando

$$\lim_{t\to 0} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0.$$

A demonstração pode ser consultada em (FYDRYZEWSKI, 2007). A partir das definições apresentadas, obtém-se um resultado importante que diz que se $(B, \|.\|)$ é uniformemente convexo, então o seu dual é uniformemente suave (FYDRYZEWSKI, 2007).

4. CONCLUSÃO

A análise desenvolvida neste trabalho permitiu sistematizar definições e resultados elementares sobre a convexidade uniforme e a suavidade uniforme em espaços de Banach. Destacaram-se os módulos de convexidade e de suavidade como ferramentas quantitativas, bem como a relação de dualidade, segundo a qual a convexidade uniforme de um espaço implica a suavidade uniforme de seu dual.

Do ponto de vista geométrico, esses conceitos podem ser interpretados como propriedades da bola unitária:

- convexidade uniforme implica na ausência de regiões planas da bola de raio unitário, sempre com fronteira arredondada;
- suavidade uniforme implica na ausência de cantos na bola de raio unitário, garantindo regularidade diferenciável.

Mais do que uma interpretação geométrica, tais propriedades apresentam aplicações relevantes em Análise Funcional e áreas afins. Um exemplo importante é apresentado por (KOZLOWSKI, 2012), que estuda a construção de pontos fixos comuns para semigrupos de mapeamentos não lineares em espaços uniformemente convexos e suavemente uniformes.

Conclui-se, assim, que a geometria da norma desempenha papel central na teoria dos espaços de Banach, influenciando diretamente resultados de existência e convergência em diferentes contextos matemáticos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FYDRYZEWSKI, R. M. **Espaços uniformemente convexos e desigualdades**. 2007. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

RICKES, André. **Espaços uniformemente convexos: um estudo acerca da definição, de propriedades e de exemplos da convexidade uniforme em espaços de Banach**. 2022. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

CLARKSON, J. A. **Uniformly convex spaces**. Transactions of the American Mathematical Society, v. 40, n. 3, p. 396–414, 1936.

KOZLOWSKI, W. M. **On the construction of common fixed points for semigroups of nonlinear mappings in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces**. Commentationes Mathematicae, v. 52, n. 2, p. 113–136, 2012.