

ESQUEMAS DE SUBDIVISÃO PARA GERAÇÃO DE CURVAS SUAVES: UMA ABORDAGEM TEÓRICA E NUMÉRICA

ALASKA LOVELACE GAY MADEIRA PEREIRA¹; MARLINE ILHA DA SILVA²

¹Centro de Engenharias, Universidade Federal de Pelotas - CEng/UFPeI –
alaska.lovelace@ufpel.edu.br

²Centro de Engenharias, Universidade Federal de Pelotas - CEng/UFPeI –
marline.ilha@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A geração de curvas e superfícies suaves desempenha um papel fundamental em diversas áreas da ciência e tecnologia, como computação gráfica, processamento de sinais, entre outras. Dentre as abordagens utilizadas para este fim, os esquemas de subdivisão destacam-se por sua eficiência computacional (DUBUC, 1986), (LYBEKK, 2017), (LIU et al., 2022), (LÓPEZ-UREÑA, 2024).

As aplicações dos esquemas de subdivisão abrangem desde a produção, de forma iterativa, de formas geométricas no plano (SHAHZAD, 2020), (SABIN, 2010), até a criação de auxílios visuais para a representação de “timelines” de animação e normalização de ruído em dados (DYN et al., 2015). Em termos gerais, um esquema de subdivisão é um processo iterativo de interpolação local, no qual o interpolador de grau p , construído a partir de $p + 1$ pontos igualmente espaçados, é expresso através de combinações lineares dos valores associados ao estêncil de interpolação. Os coeficientes destas combinações são chamados pesos ou filtros e estes independem dos pontos do estêncil escolhido.

Neste trabalho, mostraremos como os pesos são construídos a partir da interpolação de Lagrange, para os esquemas de subdivisão linear e cúbico. Além disso, através de simulações numéricas, investigamos a propriedade de convergência desses esquemas, mostrando como o processo iterativo conduz à aproximação de uma função limite contínua e suave.

2. METODOLOGIA

No esquema de subdivisão, proposto por LYBEKK (2017) e DUBUC (1986), temos como dados iniciais valores pontuais de uma função f discretizada sobre uma malha grosseira e uniforme $G_k = \{x_0^k, x_1^k, \dots, x_{N_k}^k\}$, $N_k = 2^{J+k} + 1$ pontos. A malha uniforme inicial caracteriza nosso nível (k) . Através do esquema de subdivisão encontramos aproximações para valores da função em pontos médios da malha, formando o nível $(k+1)$. Dessa forma, todas as posições no nível (k) , serão associadas a posições com índice par no nível $(k+1)$ e portanto, para estas posições nenhuma aproximação será necessária. No entanto, em posições ímpares da malha do nível $(k+1)$ os valores da função são obtidos por combinações lineares de um número par de valores da função do nível (k) . Vejamos, a seguir como os pesos dessas combinações lineares

são obtidos a partir da interpolação de Lagrange, considerando a função periódica ou não.

Construção dos filtros para subdivisão linear

Consideremos dois pontos x_0 e x_1 , sendo h o espaçamento entre eles e x o ponto médio (veja Figura 1). Os pesos são obtidos através do cálculo dos polinômios de Lagrange $l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^1 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $i = 0, 1$. Portanto, $l_0(x) = \frac{1}{2}$ e $l_1(x) = \frac{1}{2}$.

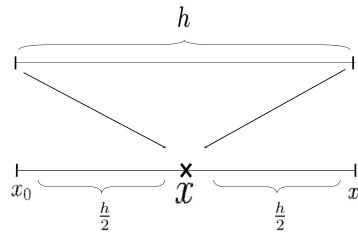


Figura 1: Estêncil para a subdivisão linear.

O polinômio interpolador avaliado em x é dado então como combinação linear com filtros constantes, independentes do espaçamento h e portanto do nível de resolução considerado inicialmente para os pontos do estêncil de interpolação. Dessa forma, escrevemos o seguinte algoritmo para a subdivisão linear:

Dado inicial: $f_j^k = f(x_j^k)$, $0 \leq j \leq N_k$, $N_k = 2^{J+k} + 1$

Para cada nível k ($k = 0 \dots nf$), (nf = nível final)

Para cada posição j ($j = 0 \dots N_k - 1$)

$$f(x_{2j}^{k+1}) = f(x_j^k)$$

$$f(x_{2j+1}^{k+1}) = \frac{1}{2}f(x_j^k) + \frac{1}{2}f(x_{j+1}^k)$$

Fim Para

$$f(x_{2N_k}^{k+1}) = f(x_{N_k}^k)$$

Fim Para

Construção dos filtros para subdivisão cúbica

Para a subdivisão cúbica consideremos quatro pontos x_0, x_1, x_2 e x_3 igualmente espaçados, sendo h o espaçamento entre eles. Dessa forma, temos dois casos a considerar: (i) valor a ser interpolado não está nas fronteiras e (ii) valor a ser interpolado está nas fronteiras. Vejamos:

(i) Seja x o ponto médio entre x_1 e x_2 (veja a Figura 2a). Calculemos o valor dos polinômios de Lagrange $l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

$$\text{Assim, } l_0(x) = -\frac{1}{16}, l_1(x) = \frac{9}{16}, l_2(x) = -\frac{9}{16} \text{ e } l_3(x) = -\frac{1}{16}.$$

(ii) Consideremos x nas fronteiras, como mostra a Figura 2b e Figura 2c. O processo de obtenção dos filtros é análogo a (i). Então, o conjunto de pesos é dado por: $\{\frac{5}{16}, \frac{15}{16}, -\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\}$ e $\{\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}, \frac{15}{16}, \frac{5}{16}\}$ para fronteira esquerda e direita, respectivamente.

Temos o seguinte algoritmo para o esquema de subdivisão cúbica:

Dado inicial: $f_j^k = f(x_j^k)$, $0 \leq j \leq N_k$, $N_k = 2^{J+k} + 1$.

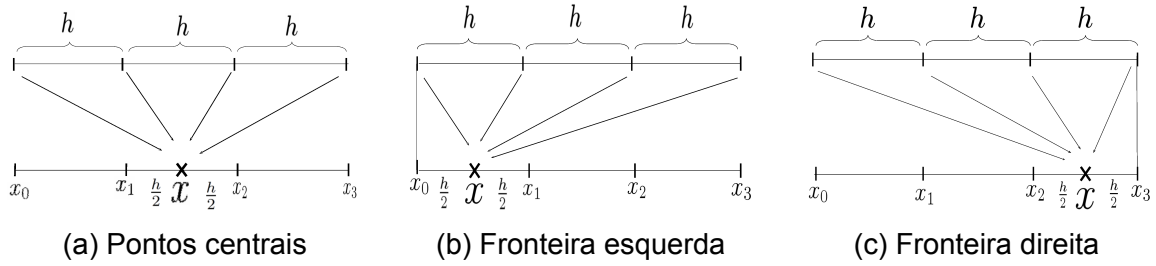


Figura 2: Estêncil para a subdivisão cúbica para dados centrados e nas fronteiras

Para cada nível k ($k = 0 \dots nf$) $nf = \text{nível final}$

$$f(x_0^{k+1}) = f(x_0^k)$$

$$f(x_1^{k+1}) = \frac{5}{16}f(x_0^k) + \frac{15}{16}f(x_1^k) - \frac{5}{16}f(x_2^k) + \frac{1}{16}f(x_3^k)$$

Para posição j ($j = 1 \dots N_k - 2$)

$$f(x_{2j}^{k+1}) = f(x_j^k)$$

$$f(x_{2j+1}^{k+1}) = -\frac{1}{16}f(x_{j-1}^k) + \frac{9}{16}f(x_j^k) + \frac{9}{16}f(x_{j+1}^k) - \frac{1}{16}f(x_{j+2}^k)$$

Fim Para

$$f(x_{2N_k-2}^{k+1}) = f(x_{N_k-1}^k)$$

$$f(x_{2N_k-1}^{k+1}) = \frac{1}{16}f(x_{N_k-3}^k) - \frac{5}{16}f(x_{N_k-2}^k) + \frac{15}{16}f(x_{N_k-1}^k) + \frac{5}{16}f(x_{N_k}^k)$$

$$f(x_{2N_k}^{k+1}) = f(x_{N_k}^k)$$

Fim Para

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, vamos apresentar os resultados numéricos, utilizando a subdivisão cúbica. Os algoritmos utilizados nas simulações foram elaborados na linguagem de programação Python, explorando os pacotes Matplotlib e Numpy.

Consideremos a função “dente de serra”, dada por $f(x) = |x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}|$ e $N_0 = 2^{3+0} + 1 = 9$ valores de $f(x)$ discretizada de maneira uniforme sobre o intervalo $[-1, 1]$.

Na Figura 3a são mostrados os dados iniciais do esquema (pontos vermelhos) e as linhas pontilhadas compreendem a função original. Aplicando o algoritmo de subdivisão cúbica nesses dados, mostremos na Figura 3b, o nível 1 do esquema, ou seja, $N_1 = 2^{3+1} + 1 = 17$ valores sobre intervalo $[-1, 1]$. As Figuras 3c e 3d mostram respectivamente o nível 3, com $N_3 = 2^{3+3} + 1 = 513$ pontos e o nível 6, com $N_6 = 2^{3+6} + 1 = 4097$ valores sobre o intervalo $[-1, 1]$.

Observe a convergência de maneira suave para a função limite, ou seja, a medida em que ocorre o refinamento iterativo, o método de subdivisão cúbica preserva a forma global da função e suaviza as transições, enfatizando a sua propriedade de convergência.

Neste trabalho, além da subdivisão cúbica também será considerada a subdivisão linear, a fim de comparar o comportamento dos diferentes esquemas de subdivisão em termos de convergência e suavidade. Além disso, serão apresentados resultados numéricos com o objetivo de analisar outras propriedades relevantes desses esquemas como a convexidade, enriquecendo o estudo apresentado neste texto.

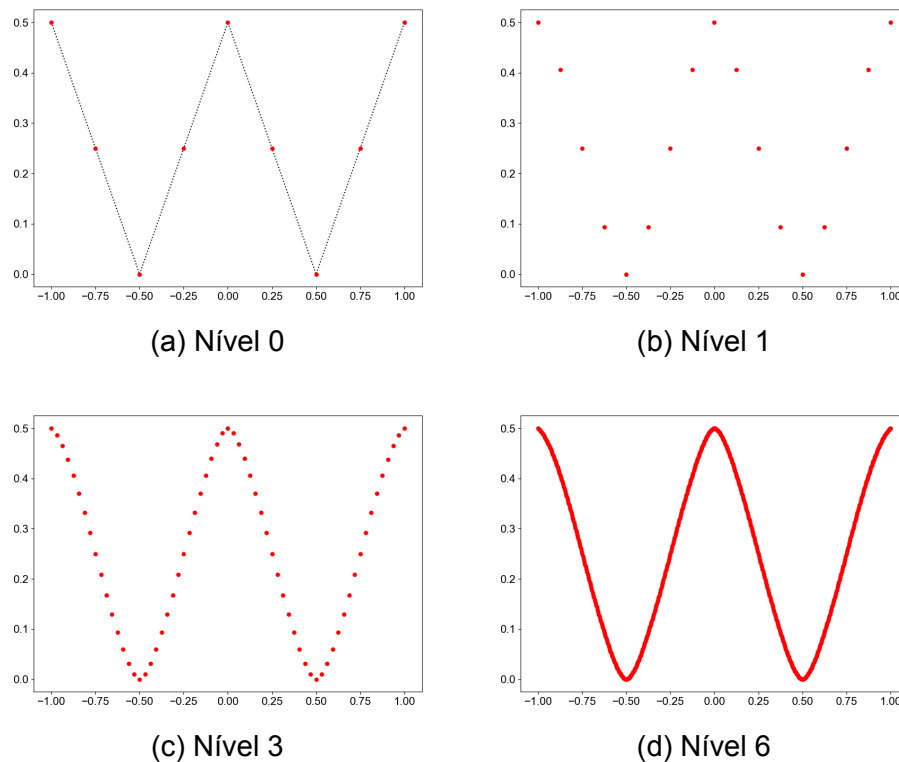


Figura 3: Subdivisão cúbica aplicada à função $f(x) = |x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}|$.

4. CONCLUSÃO

O estudo mostrou que os esquemas de subdivisão são eficientes para a construção de funções limites suaves a partir de dados discretos, evidenciando que esses esquemas são ferramentas eficazes para aplicações envolvendo modelagem numérica.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DUBUC, Serge. Interpolation through an iterative scheme. **Journal of mathematical analysis and applications**, v. 114, n. 1, p. 185-204, 1986.
- DYN, Nira et al. Univariate subdivision schemes for noisy data with geometric applications. **Computer Aided Geometric Design**, v. 37, p. 85-104, 2015.
- LIU, Yan; SHOU, Huahao; JI, Kangsong. Review of subdivision schemes and their applications. **Recent Patents on Engineering**, v. 16, n. 4, p. 50-62, 2022.
- LÓPEZ-UREÑA, Sergio. A uniform non-linear subdivision scheme reproducing polynomials at any non-uniform grid. **Applied Mathematics and Computation**, v. 479, p. 128889, 2024.
- LYBEKK, Espen Christian. **Nonlinear interpolatory curve subdivision schemes**. 2017. Dissertação de Mestrado.
- SABIN, Malcolm. **Analysis and Design of Univariate Subdivision Schemes**. New York: Springer. 2010.
- SHAHZAD, Aamir et al. A novel numerical algorithm to estimate the subdivision depth of binary subdivision schemes. **Symmetry**, v. 12, n. 1, p. 66, 2020.