

ANÁLISE DE BIFURCAÇÕES NUM SISTEMA HOSPEDEIRO-PARASITOIDE DA MOSCA-DAS-FRUTAS SUL-AMERICANA

LEONARDO VIEIRA GONÇALVES¹; ALEXANDRE MOLTER²

¹Universidade Federal de Pelotas – lvgoncalves@inf.ufpel.edu.br

²Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A mosca-das-frutas sul-americana, *Anastrepha fraterculus* (Wiedemann, 1830) (Diptera, Tephritidae) (MALAVASI et al., 1983), é uma praga de grande impacto na fruticultura em regiões de clima temperado e subtropical. O parasitoide *Doryctobracon brasiliensis* (Szepligeti, 1911) (Hymenoptera, Braconidae) surge como alternativa promissora para o controle biológico, ao parasitar as larvas da mosca (PONCIO, 2015).

Aspectos do controle biológico podem ser analisados através de modelagem matemática, que pode ser uma ferramenta útil para entender essa interação e auxiliar na definição de estratégias de controle.

Neste trabalho, apresentamos um sistema hospedeiro-parasitoide e realizamos uma análise de bifurcações associada ao tempo de manipulação para o parasitismo. A resposta funcional utilizada no modelo, que descreve o parasitismo, é a do tipo II (HOLLING, 1959).

Foram realizadas algumas simulações, cujos resultados mostram que variações nesse parâmetro levam ao surgimento de ciclos-limite, resultando em oscilações periódicas nas trajetórias temporais do sistema.

2. METODOLOGIA

O modelo matemático estudado é um sistema hospedeiro-parasitoide com três equações diferenciais, onde a interação é descrita por uma resposta funcional Holling tipo II (HOLLING, 1959). As populações consideradas são: x_1 (densidade de larvas), x_2 (densidade de adultos) e x_3 (densidade de parasitoides). A dinâmica dessas populações é dada por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_2 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \mu_1 x_1 - \gamma x_1 - \frac{ax_1 x_3}{1 + ahx_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha_1 \gamma x_1 - \mu_2 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \delta \alpha_2 \frac{ax_1 x_3}{1 + ahx_1} - \mu_3 x_3, \end{cases} \quad (1)$$

onde μ_i , $i = 1, 2, 3$, representam as taxas de mortalidade natural; γ e δ correspondem às conversões de larvas em moscas adultas e parasitoides, respectivamente; α_j , $j = 1, 2$, representam as frações de fêmeas; a é a taxa de captura instantânea; h é o tempo de

manipulação do parasitismo; k indica a capacidade de suporte e r representa a taxa de oviposição diária por mosca.

A partir do sistema (1), foram encontrados três pontos de equilíbrio, $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (\frac{k}{r\alpha_1\gamma}S, \frac{k}{r\mu_2}S, 0)$ e $P_3 = (\frac{\mu_3}{aV}, \frac{\alpha_1\gamma}{\mu_2}\frac{\mu_3}{aV}, \frac{\alpha_2\delta}{\mu_2aV^2}P)$, onde $S = r\alpha_1\gamma - \mu_2(\mu_1 + \gamma)$, $V = \alpha_2\delta - h\mu_3$ e $P = (VS - \frac{r\alpha_1\gamma\mu_3}{ak})$.

O primeiro ponto de equilíbrio (P_1) representa a extinção das populações. O segundo (P_2) descreve um sistema sem parasitoides. O terceiro (P_3) caracteriza a coexistência das três populações. Neste estudo, focamos no ponto de equilíbrio P_3 , em que a análise de bifurcações consiste na variação do parâmetro h , que é o tempo de manipulação para o parasitismo.

A estabilidade local do ponto P_3 é analisada por meio da matriz jacobiana do sistema em torno do ponto, dada por:

$$J_{P_3} = \begin{bmatrix} -A & r(1 - \frac{\mu_3}{B}) & \frac{-\mu_3}{\alpha_2\delta} \\ \alpha_1\gamma & -\mu_2 & 0 \\ \frac{P}{\mu_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com J_{P_3} encontramos o seguinte polinômio característico:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

onde

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = A + \mu_2,$$

$$a_2 = A\mu_2 - r\alpha_1\gamma(1 - \frac{\mu_3}{B}) + \frac{P\mu_3}{\mu_2\alpha_2\delta},$$

$$a_3 = \frac{P\mu_3}{\alpha_2\delta},$$

com

$$A = \frac{r\alpha_1\gamma\mu_3}{k\mu_2aV} + \mu_1 + \gamma + \frac{P}{\mu_2\alpha_2\delta},$$

$$B = akV.$$

Considerando a viabilidade biológica, teremos sempre $a_1 > 0$ e $a_3 > 0$. Portanto, de acordo com o critério de Routh-Hurwitz (OGATA, 2010), para que P_3 seja estável localmente é necessário que, $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, ou seja:

$$H = A^2\mu_2 + \frac{A\mu_3r\alpha_1\gamma}{B} + \frac{A\mu_3P}{\alpha_2\delta\mu_2} + \frac{\mu_3r\alpha_1\gamma\mu_2}{B} + A\mu_2^2 - Ar\alpha_1\gamma - r\alpha_1\gamma\mu_2 > 0. \quad (2)$$

A bifurcação de Hopf é uma das principais ferramentas que explica a transição de estabilidade que resultam em ciclos-limite. O critério de LIU (1994) evita o cálculo direto

dos autovalores da equação característica e permite identificar a ocorrência dessas bifurcações, facilitando o estudo em um sistema tridimensional. No contexto do presente trabalho, onde utilizamos o tempo de manipulação para o parasitismo como parâmetro de controle de bifurcação, o critério é dado por:

Condição 1: $a_1(h^*) > 0, \Delta(h^*) = a_1(h^*)a_2(h^*) - a_3(h^*) = 0, a_3(h^*) > 0$.

Condição 2: $(\frac{d\Delta}{dh})_{h=h^*} \neq 0$, onde h^* é o ponto crítico que indica a mudança qualitativa na estabilidade local do ponto P_3 .

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Adotando um conjunto de valores para os parâmetros do modelo, considerando condições de laboratório, e mantendo h como variável, a partir da inequação (2) constatamos que o ponto P_3 é estável com $h < 3,6$ e $4,371 < h < 4,37301$. Com base no ponto crítico $h^* = 3,6$, observa-se que, ao ultrapassar esse valor crítico, ocorre uma bifurcação de Hopf, pois as condições do critério de Liu são satisfeitas. Para ilustrar esse fenômeno, apresentamos a Figura 1, que exibe o diagrama de bifurcação, e a Figura 2, que mostra o diagrama de fase do sistema (1), evidenciando um dos ciclos-limite resultante. A condição inicial para as simulações foi de $(x_1, x_2, x_3) = (500, 10, 5)$.

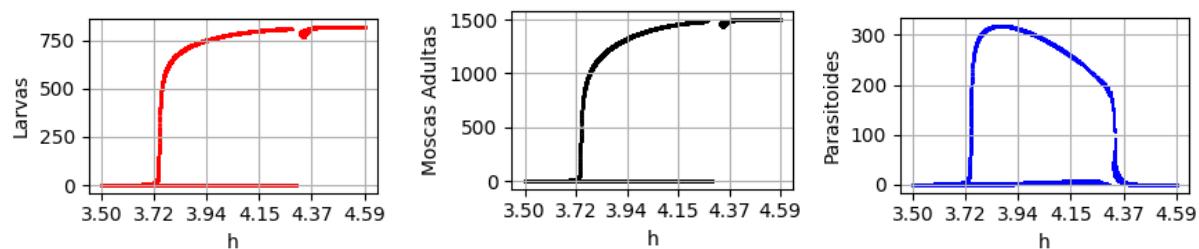


Figura 1. Diagramas de bifurcações. Fonte: do autor.

Observe na Figura 1 que a dinâmica do sistema consiste em três situações de equilíbrio. A primeira mostra o sistema equilibrado no equilíbrio da coexistência e estável (até $h < 3,6$); a segunda, quando surge a bifurcação, o sistema se torna instável e surgem os ciclos-limite; e como terceira situação, o sistema passa para um equilíbrio em que os hospedeiros vão para um suporte superior e o parasitoide é extinto.

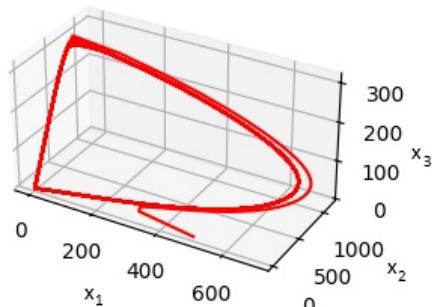


Figura 2. Diagrama de fase. Fonte: do autor.

4. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos evidenciam a influência determinante do tempo de manipulação do parasitoide sobre a dinâmica populacional do sistema, em especial na ocorrência de ciclos-limite oriundos de uma bifurcação de Hopf. Nesse contexto, o estudo de bifurcações se mostra essencial para compreender as transições qualitativas no sistema dinâmico, permitindo identificar limiares críticos a partir dos quais o comportamento populacional se altera drasticamente. Pretende-se, em trabalhos futuros, avaliar suas implicações no controle biológico da mosca-das-frutas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- HOLLING, C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism, **The Canadian Entomologist**, Ottawa, v. 91, n. 7, pp. 385–398, 1959.
- LIU, W. M. Criterion of Hopf bifurcations without using eigenvalues, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 182, n. 1, pp. 250–256, 1994.
- MALAVASI, A.; MORGANTE, J. S.; PROKOPY, R. J. Distribution and activities of *Anastrepha fraterculus* (Diptera: Tephritidae) flies on host and nonhost trees, **Annals of the Entomological Society of America**, Oxford, v. 76, n. 2, pp. 286–292, 1983.
- OGATA, K. **Modern control engineering**. Londres: Pearson, 2010, 5th Edition.
- PONCIO, S. **Bioecologia e técnicas de criação de parasitoides (Hymenoptera) nativos de três espécies de Anastrepha no Brasil e no México**. 2015. 133f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Fitossanidade, Universidade Federal de Pelotas.