

## MODELOS CINEMÁTICO DIRETO E INVERSO EM BRAÇO PLANAR DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

VICTOR RAFAEL SECUNDINO SANTOS<sup>1</sup>; ISADORA VENZKE DIAS<sup>2</sup>;  
ALEXANDRE MOLTER<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Curso de Engenharia da Computação/UFPEL– vrssantos@inf.ufpel.edu.br

<sup>2</sup> Curso de Engenharia da Computação/UFPEL– ivdias@inf.ufpel.edu.br

<sup>3</sup> Instituto de Física e Matemática- IFM/UFPEL– alexandre.molter@ufpel.edu.br

### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo das equações matemáticas que modelam um braço robótico manipulador de dois graus de liberdade, compostos por duas juntas. Esse tipo de manipulador é dito como braço planar, cujos modelos matemáticos advêm da cinemática direta, inversa e diferencial.

O objetivo desse trabalho é de simular no *software* numérico MATLAB tais modelos. As equações utilizadas seguem o livro texto em robótica SICILIZANO et al. (2010).

Em primeiro plano, é apresentada a cinemática direta e inversa, sendo essencialmente equações lineares baseadas nos ângulos e nas posições dos elos. Em segundo plano é estudada a cinemática diferencial que inclui aceleração e velocidade no sistema, criando a necessidade de impor restrições, como o espaço de trabalho do robô, além de permitir o planejamento de trajetórias específicas, ao condicionar o movimento a equação desejada.

Simulações computacionais serão apresentadas e discutidas.

### 2. METODOLOGIA

A metodologia abordada consiste no estudo sequencial dos modelos cinemático direto e inverso, cinemático diferencial, como abordados em SICILIZANO et al. (2010), utilizando os capítulos 2, “Cinemática”, 3, “Cinemática Diferencial e Estática”, e 4, “Planejamento de Trajetória”. Dessa forma, estabelecem-se as equações fundamentais para as simulações no *software* MATLAB, em particular sua versão online. Adicionalmente, obras complementares foram utilizadas no entendimento matemático dos modelos, em particular CRAIG (2012) e SPONG et al. (2020).

As equações utilizadas na cinemática direta e inversa, definidas no livro texto de referência, estão apresentadas abaixo, como equações (1)-(4). A primeira consiste numa transformação homogênea, essencialmente é usada consecutivamente para computar mudanças sucessivas nos ângulos. A segunda consiste no cálculo dos ângulos,  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , calculados a partir de relações entre ângulos e posições, escritas na terceira equação. Portanto,

$$A_i^{i-1}(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde

$$\vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1), \quad \vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2), \quad (2)$$

e

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p w_y - a_2 s_2 p w_x}{p^2 w_x + p^2 w_y}, c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p w_x + a_2 s_2 p w_y}{p^2 w_x + p^2 w_y}, \quad (3)$$

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}, c_2 = \frac{p^2 w_x + p^2 w_y - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2}. \quad (4)$$

A descrição coeficientes das equações (1)-(4) estão representados na tabela que segue:

Coeficiente	Descrição
$c_i, s_i$	Cosseno e Seno de índice $i$
$c_1, s_1$	Cosseno e Seno de $\vartheta_1$
$c_2, s_2$	Cosseno e Seno de $\vartheta_2$
$\vartheta_1$	Ângulo entre primeiro elo e superfície
$\vartheta_2$	Ângulo entre primeiro e segundo elo
$a_1$	Comprimento do primeiro elo
$a_2$	Comprimento do segundo elo
$p w_x$	Posição em $x$ do efetuador final
$p w_y$	Posição em $y$ do efetuador final

Para estipular um tempo fixo à trajetória do robô, utilizando as informações da cinemática direta e inversa, é estabelecido um polinômio de grau 3, cuja variável é o tempo. A escolha do polinômio de grau 3 é para que a curva seja suave. O polinômio é dado por:

$$q(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0, \quad (5)$$

onde  $b_0, b_1, b_2$  e  $b_3$  são os coeficientes do polinômio, determinados a partir das informações da velocidade e posição iniciais, aceleração linear. O objetivo de estabelecer o tempo de execução da trajetória é que qualquer trajetória seja executada no tempo estipulado.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Partindo das equações (1)-(4), o *software* numérico MATLAB foi utilizado para implementação de um código computacional e a geração gráfica. Em primeira instância, a forma física do manipulador robótico, é ilustrada na figura 1, estabelecendo a ideia de dois elos e duas juntas, e um efetuador final. Tanto a posição no plano cartesiano, como a velocidade e aceleração são traçadas a partir do efetuador final (posição final do braço robótico).

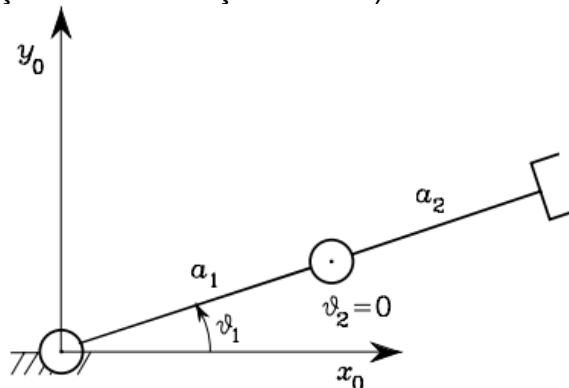


Figura 1: braço planar de dois DOF. Fonte: SICILIANO et. al (2010).

As implementações da cinemática direta e da cinemática inversa seguem as equações (1)-(4). A figura 2 mostra a cinemática direta, cuja posição inicial é dada por (2,0) e rotacionando um ângulo de  $45^\circ$  tanto para  $\vartheta_1$ , como para  $\vartheta_2$ . O comprimento dos elos é de uma unidade de medida cada um.

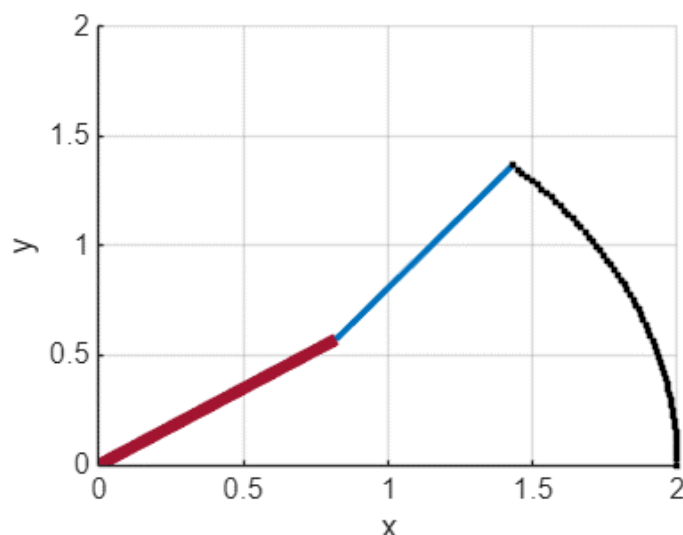


Figura 2: trajetória do efetuador final no plano cartesiano. Fonte: do autor.

Já a implementação do tempo para a execução da trajetória, equação (5) é apresentada na figura 3. Como exemplo, foi escolhida a curva rosácea de 4 pétalas, definida na equação (6), em coordenadas polares. A figura 3 mostra o resultado gráfico da movimentação, onde a curva em preto é a trajetória de referência. Como a equação de formação está em coordenadas polares, é feita a conversão para coordenadas cartesianas.

$$r = s(2\alpha) \quad (6)$$

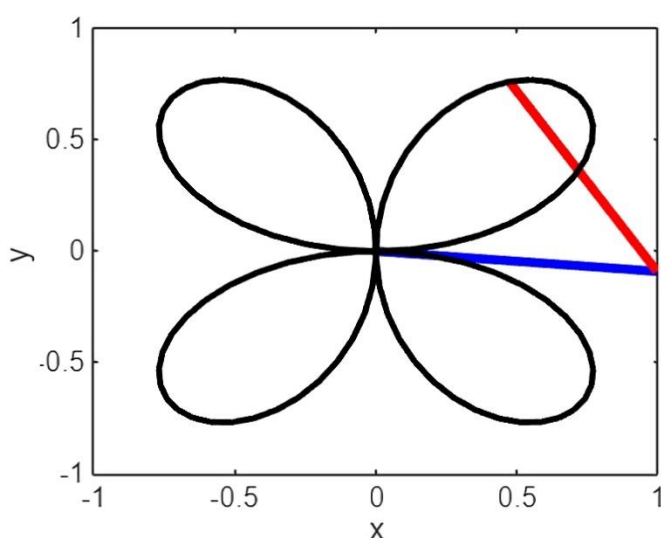


Figura 3: trajetória do efetuador final no plano cartesiano. Fonte: do autor.

O tempo estabelecido para a execução da trajetória da rosácea foi o de 10 segundos, partindo da posição inicial (0, 0).

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram implementados códigos computacionais para simular cinemáticas direta, inversa e diferencial, em braço planar de dois graus de liberdade. As implementações dos códigos foram realizadas na plataforma MATLAB para executar a proposta e gerar as trajetórias desejadas, conforme a referência de SICILIZANO et al. (2010).

Como continuação dos estudos, será analisada e implementada em *software* computacional a dinâmica e o controle de movimento do manipulador planar de dois elos.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G. **Robotics: Modelling, Planning and Control**. Londres: Springer, ed. 2009a, 2009.

Craig, J. J. **Robótica**. São Paulo: Pearson, 3ª ed. 2012.

Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M. **Robot Modelling and Control**. New York: Wiley, 2ª ed., 2020.