SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA ONDA DE UMA CORDA VIBRANTE VIA TRANSFORMADA DE LAPLACE E TALBOT-FIXO

JOSÉ ELIAS MARTINS LISBOA[1]; FELIPE M. MENDES BARBOSA[2]; IAGO HENRIQUE TEIXEIRA MARCOLINO[3];
LESLIE D. PÉREZ-FERNANDEZ[4]; CAMILA PINTO DA COSTA[5]

[1]Universidade Federal de Pelotas – j.eliaslisboa1999@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – barbosa.felipe@ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal de Pelotas – iago.mat@hotmail.com
[4]Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[5]Universidade Federal de Pelotas – camila.costa@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

As transformadas de integrais são extremamente úteis para resolver problemas físicos, dentre elas se encontram a Transformada de Laplace. Esta consiste em transformar funções da variável t, funções temporais, em funções na variável s, onde estas funções se encontram no espaço de Laplace. Disto, sua definição é (SPIEGEL, 1979).

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_{0}^{\infty} F(t)e^{-st}dt \quad (1)$$

Onde $\mathcal{L}$ é o operador desta transformada. Uma de suas utilidades é na solução de Equações Diferenciais (ZILL, 2016), sendo um dos métodos de soluções para as ED's. Ao usar este método e indo para o espaço das funções na variável s, é possível retornar ao domínio original usando sua Transformada Inversa (SPIEGEL, 1979), simbolicamente denotado por $\mathcal{L}^{-1}$. Há uma fórmula de inversão complexa, chamada de integral de Bromwich, integral de inversão de Mellin, sendo esta uma integral de linha (BUTKOV, 1988). No entanto, para este artigo não será utilizada tal integral, e sim a tabela das inversas, pois a inversa é tabelada (SPIEGEL, 1979).

Sabendo que vários problemas físicos caem em ED's, principalmente devido a segunda lei de Newton que consiste no somatório das forças sendo igual ao produto da massa e da segunda derivada da posição em função do tempo, ou no caso geral; sendo a derivada do momento (NUSSENZVEIG, 2002):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (2)$$

Este trabalho visa investigar um problema envolvendo uma corda vibrante e infinitamente longa, sendo este problema físico uma Equação Diferencial Parcial na qual a Transformada de Laplace transforma esta EDP em uma Equação Diferencial Ordinária (SPIEGEL, 1979) e sendo assim mais fácil de resolvê-la. Será usado a forma analítica para a solução do problema, e um método computacional para sua inversão, sendo ele o algoritmo Talbot-Fixo.

2. METODOLOGIA

Sendo uma corda infinitamente longa com a extremidade $x = 0$, e sendo submetida a um deslocamento transversal periódico de $A_0 sen(\omega t)$, para todo $t > 0$. Se $Y(x, t)$ é o deslocamento transversal da corda num ponto qualquer x num tempo qualquer t, onde a última condição especifica que o deslocamento é limitado por M, então o problema de valores iniciais e contorno é (SPIEGEL, 1979):

$$\begin{aligned} &Y_{tt} - a^2 Y_{xx} = 0, \quad x > 0,\ t > 0, \\ &Y(x, 0) = 0,\ Y_t(x, 0) = 0, \\ &Y(0, t) = A_0 sen(\omega t), \\ &|Y(x, t)| < M \end{aligned} \tag{3}$$

Tomando a transformada em ambos os lados,

$$\mathcal{L}\{Y_{tt}\} = a^2 \mathcal{L}\{Y_{xx}\} \tag{4}$$

$$s^2 y(x, s) - sY(x, 0) - Y_t(x, 0) = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{5}$$

Sendo $\mathcal{L}\{Y(x, t)\} = y(x, s)$. Substituindo as condições iniciais e reorganizando os termos, teremos a seguinte EDO,

$$y'' - \frac{s^2}{a^2} y = 0. \tag{6}$$

A nossa solução se torna,

$$y(x, s) = C_1 e^{\frac{s}{a}x} + C_2 e^{-\frac{s}{a}x}. \tag{7}$$

Sabendo que a condição de contorno é $Y(0, t) = A_0 sen(\omega t)$, então a transformada de laplace da condição é,

$$y(0, s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \tag{8}$$

Utilizando a equação (7) e fazendo com que $x = 0$, conseguiremos uma relação entre a equação (7) e (8). A fim de determinar as constantes C_1 e C_2, teremos a seguinte expressão,

$$\frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} = C_1 + C_2 \tag{9}$$

Como a minha função está limitada da seguinte forma: $|Y(x, t| < M$. E minha expressão não pode explodir para o infinito quando $x \to \infty$, então, $C_1 = 0$ e C_2 se torna a expressão (9). Disto, temos a seguinte função na variável s

$$y(x, s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{s}{a}x} \tag{10}$$

Tomando a Inversa de Laplace da (10) em ambos os lados

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(x,s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{s}{a}x}\} \qquad (11)$$

Resolvendo essa inversa de forma tabelada, por fim chegamos no resultado final de forma analítica e temos a seguinte solução da minha (3) dada aquelas condições

$$Y(x,t) = A_0 sen[\omega(t - \frac{x}{a})], \text{ se } t > \frac{x}{a} \text{ ou } 0,\ t < \frac{x}{a}.$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nas figuras abaixo encontra-se a plotagem gráfica das soluções via linguagem python, tanto o resultado analítico (à esquerda) e da solução numérica via método talbot-fixo (à direita). Para fazer tal plotagem devemos escolher de forma arbitrária os valores para A_0, ω e a: Assim obtendo o seguinte resultado;

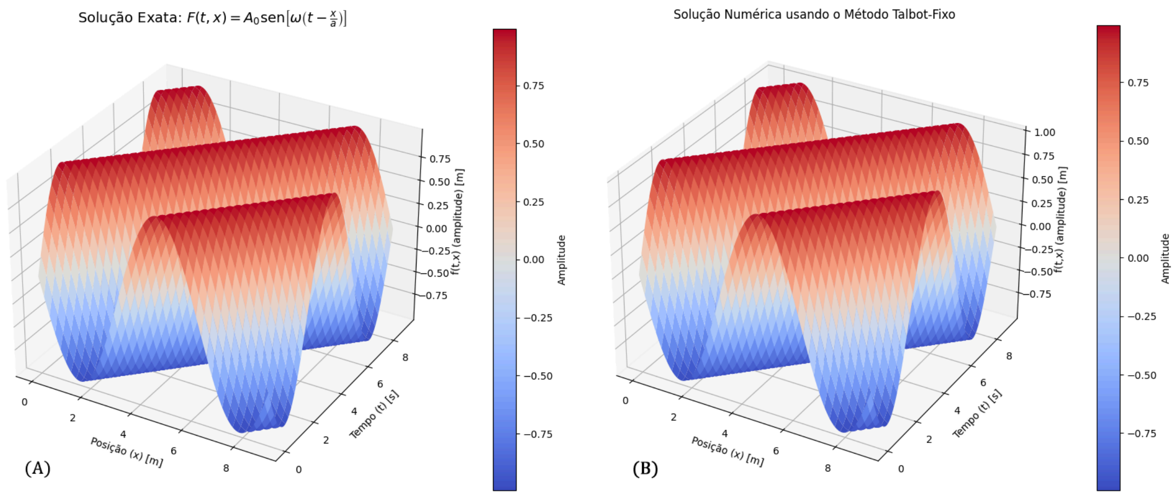

Figura 1. Comparação da solução exata (A) e a numérica (B).

A diferença visual entre os gráficos é imperceptível, então, recorremos ao máximo erro absoluto entre elas. Sendo o resultado e o cálculo feito da seguinte forma: $f_{numérico} - f_{exato} = 0,0002563$. Agora tomando $x = 10$, valor fixo, temos;

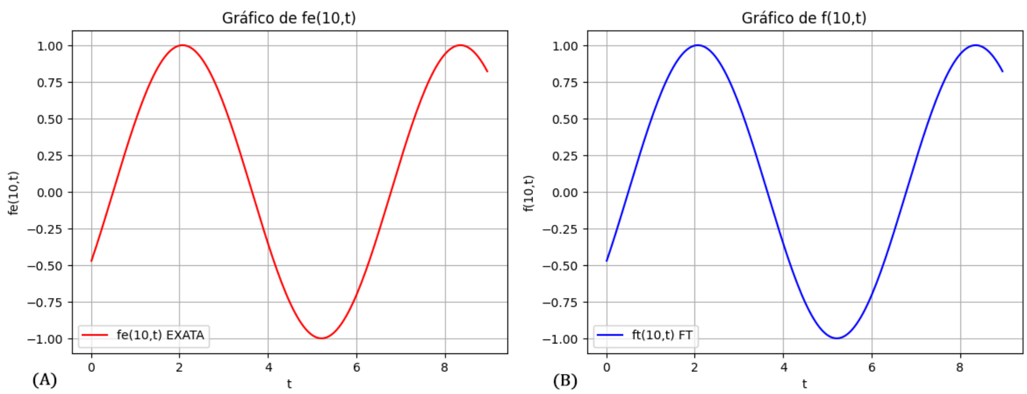

Figura 2. Comparação da solução exata (A) e a numérica (B).

4. CONCLUSÕES

Conclui-se que o método da Transformada de Laplace para solucionar equações diferenciais, é extremamente eficaz e, de certa forma, mais elegante do que outros métodos de soluções como o de séries de potências, Frobenius, substituição e demais métodos que supõe como será nossa solução. Também vale destacar a quantidade de passos a menos ao aplicar as condições iniciais e de contorno que por sua vez já entra no meio da transformada da função; assim diminuindo a chance de haver erros na parte analítica. Isto se deve a robustez da transformada de integral contendo inúmeras propriedades e teoremas. No entanto, quanto maior a complexidade do problema mais difícil será fazer sua inversão.

Disto, entra a necessidade de um método computacional, que neste caso foi utilizado o método de inversão numérica talbot-fixo. Com poucas linhas de código é o suficiente para fazer a inversão com uma considerável precisão (ver Figura 1.) sem muito custo computacional.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MURRAY R. Spiegel. **Coleção Schaum: Transformadas de Laplace**. Rio de Janeiro: Mcgraw Hill, 1979.

BUTKOV, E. **Física-Matemática**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.

ZILL, D. **Equações diferenciais: com aplicações em modelagem**. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

NUSSENZVEIG, Hersh Moysés. **Curso de física básica, v. 1**. 4. ed. rev. São Paulo : Edgar Blucher, 2002.