FUNÇÃO DE GREEN PARA PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO

PEDRO HENRIQUE CARDOSO GOMES[1]; EDUARDO DA SILVA SCHNEIDER[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – jklpet.ufpel@gmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – eduardo.schneider@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Ao estudarmos o tema das antenas elétricas, percebemos a necessidade de determinar os campos elétricos e magnéticos irradiados pelas diferentes topologias, conforme discutido em BALANIS (2016). Na análise de problemas de radiação, é comum definir as fontes para, em seguida, determinar os campos irradiados por elas. No entanto, a obtenção direta desses campos irradiados pode ser bastante complexa. Uma abordagem amplamente utilizada para facilitar essa resolução é o uso de funções vetor potenciais associadas às grandezas desejadas, resultando em equações diferenciais parciais (PDEs) mais simples de solucionar.

Neste trabalho, propomos uma metodologia para resolver equações diferenciais utilizando a função de Green. Começamos com problemas simples, focando nas equações diferenciais ordinárias, e desenvolvemos uma abordagem geral para obter a função de Green, em problemas de valor inicial para equações lineares de ordem $n \geq 2$, usando a solução do problema homogêneo associado e o método de variação de parâmetros para encontrar uma solução particular, como sugerido em TESCHL (2024). Dessa forma, conseguimos formular o operador integral que resolve diretamente a equação diferencial. Nos problemas de valor de contorno (PVCs), especialmente aqueles relacionados a problemas de Sturm-Liouville, expressamos com ajuda do método de variação de parâmetros, a função de Green do problema. Em seguida, elaboramos a solução de um PVC, por função de Green em termos de uma base gerada para o espaço das soluções da equação diferencial correspondente.

2. METODOLOGIA

Ao tentarmos resolver uma equação da forma $L[y] = f$, onde L é um operador diferencial, o termo fonte $f = f\ (t)$ é uma função conhecida e $y = y(t)$ é a solução da equação procurada, surge a questão de se poderíamos, assim como ao resolver um sistema linear de equações, encontrar a inversa do operador linear, e obter a solução da forma $y\ =\ L^{-1}\ [\ f\ ]$, onde L^{-1}, é o operador inverso a L.

Considerando que temos um operador diferencial L, podemos esperar que seu operador inverso seja um operador integral. Neste caso, podemos supor que a solução do problema de valor de contorno original possa ser escrita como

$$y(t) = \int G(t,\tau) f(\tau) d\tau \qquad (1)$$

onde $G(t,\tau)$ é chamada de função de Green. Usualmente, encontrar o operador inverso, quando ele existe, pode ser bem complexo, e resolver diretamente o problema integral, não é tarefa fácil do mesmo modo.

Nesse trabalho, primeiro obtemos a função de Green para um problema de valor inicial em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, e depois generalizaremos o método para equações de ordem n, com $n \geq 2$. Para isso, partimos da solução associada ao problema homogêneo e, então, aplicamos o método da variação de parâmetros a fim de obter a solução geral do problemas, de onde, aplicando as condições iniciais podemos escrever a função de Green do problema na forma desejada como na Eq. (1). Para problemas de valor de contorno, partimos da equação de segunda ordem associadas ao operador linear autoadjunto de Sturm-Liouville, utilizando suas propriedades para então expressar a função de Green como uma série de autofunções associadas ao operador de Sturm-Liouville, conforme (HERMAN, 2023).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para demonstrar a aplicação da metodologia desenvolvida, implementamos um código computacional que gera aproximações sucessivas da função de Green para um problema de valor de contorno com condições de fronteira nula. Como a solução exata é conhecida, isso nos permite comparar os resultados numéricos com os analíticos exatos.

Exemplo: considere o problema de valor de contorno com condições de fronteira nula dado por:

$$\begin{gathered} y'' + 4y = x^2, \qquad 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

onde $y = y(t)$ é a solução que queremos expressar usando a função de Green. Este exemplo foi escolhido para ilustrar a metodologia e comparar a solução obtida como uma série de autofunções, do operador de Sturm-Liouville associado, com a solução de Green já conhecida. Onde a solução analítica exata é dada por

$$y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\sin(x)\cos(1-x)}{4\sin(1)}. \tag{3}$$

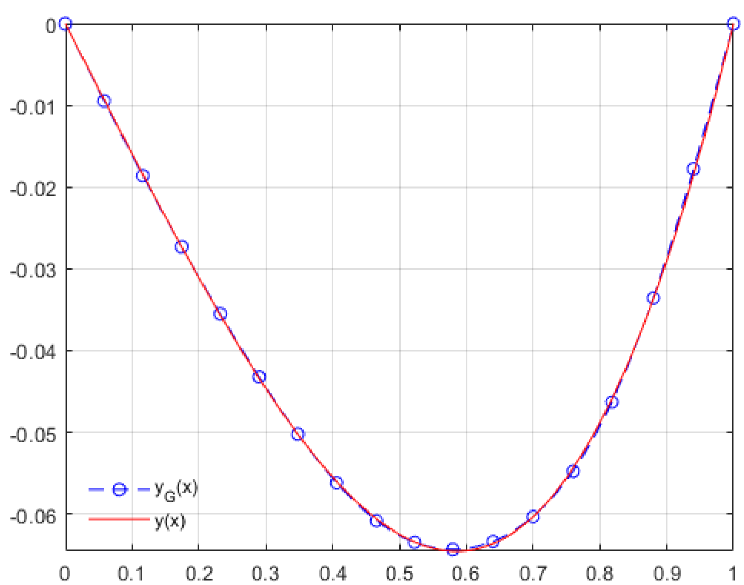
Para obtermos a análise das duas soluções, desenvolvemos um código que calcula numericamente os autovalores λ_n, as autofunções $\phi_n(x)$ e as normas $\|\phi_n\|$, para $n = 1, 2, \dots, n$, onde n é o número de termos na expansão. Comparamos graficamente as duas soluções do problema de valor de contorno, onde a Figura 1 apresenta o código com as principais linhas de comando, e a Figura 2 mostra a comparação gráfica entre a solução aproximada pela função de Green e a solução analítica exata.

Figura 1: Código Computacional

```
syms x csi n

% Cálculo dos autovalores
lamda(n) = -(n^2)*(pi^2)+4;

% Cálculo das autofunções
phi(x,n) = sin(n*pi*x);

% Cálculo da norma das autofunções
norm_phi = int(phi(x,1)^2,x,[0 1]);

% Número de termos da expansão função de Green
num_terms = 5;

% Aproximação pela expansão em função de Green
G(x,csi) = symsum((phi(x,n)*phi(csi,n))/(norm_phi*lamda(n)),n,1,num_terms)

% Termo não homogêneo
f(csi) = csi^2;

% Solução aproximada pelo método de expansão em autofunções
y_G(x) = int(G(x,csi)*f(csi),csi,[0 1])

% Solução analítica exata dada pela função de Green
y(x) = x^2/4 - (sin(x)*cos(1-x))/(4*sin(1))

% Plotagem das soluções
fplot(y_G(x),'b--o',[0 1]) %Plotagem das soluções
grid on
hold on
fplot(y(x),'r',[0 1])
legend('y_G(x)','y(x)','Location','southwest')
legend('boxoff')
hold off
```

Por fim, ao executar o código para o problema sugerido no exemplo, obtemos como resultado a solução em série pela função de Green e da solução exata para o problema de valor de contorno.

Figura 2: Comparação dos Resultados



Ao compararmos, graficamente, os resultados obtidos, verificamos que a solução por séries da função de Green, aproxima a solução exata, a partir de cinco termos no somatório.

4. CONCLUSÕES

No trabalho, introduzimos o método da função de Green, primeiramente abordando problemas de valor inicial e, em seguida, problemas de valor de contorno no mesmo contexto. Exploramos autofunções e representamos a função de Green em termos dessas autofunções para um problema de valor de contorno. Embora nosso estudo tenha se limitado a equações diferenciais ordinárias, planejamos expandir o método para equações diferenciais parciais em pesquisas futuras, pois a função de Green facilita a compreensão do problema e da solução. No entanto, reconhecemos que, em alguns casos, encontrar a função de Green pode ser tão desafiador quanto resolver a própria equação diferencial, seja em problemas de valor inicial ou em problemas de valor de contorno.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALANIS, C. A., **Antenna theory: analysis and design**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2016.

HERMAN, R., **Introduction to Partial Differential Equations**. LibreTexts Mathematics, 2023. Disponível em: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_(Herman)

TESCHL, G., **Ordinary differential equations and dynamical systems**. Providence: American Mathematical Society, 2011.