# UMA SOLUÇÃO EXATA PARA O MODELO DE BLACK-SCHOLES ATRAVÉS DO MÉTODO SPLIT

FELIPE GONÇALVES DE SOUZA[1];
CLÁUDIO ZEN PETERSEN[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – 60felipesouza101@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – claudio.petersen@ufpel.edu.br*

## 1. INTRODUÇÃO

No Mercado Financeiro, saber quando comprar e vender ações pode representar um desafio em diferentes sentidos. Depende de estratégia, de sorte, da qualidade de informação que o investidor tem disponível, etc. Uma estratégia bastante utilizada às vezes como forma de reduzir danos – às vezes como forma de maximizar lucros através de especulações – é o uso de opções de compra e venda.

As opções são derivativos, o que significa que seu valor deriva do valor de um ativo original. Opções de compra garantem ao investidor o direito (e não o dever) de comprar um ativo no futuro por um preço travado no ato da compra da opção (por exemplo, o direito de comprar um certo ativo no futuro por R$100, mesmo que seu preço na data final seja de R$120). Já opções de venda funcionam de forma análoga, é garantido o direito de vender um ativo por um preço específico numa data futura, mesmo que seu valor nessa data esteja abaixo do acordado.

Dado que, já é difícil precificar as ações do Mercado Financeiro, o trabalho de precificar as opções torna-se quase impossível, com um comportamento quase aleatório. Para tentar precificar as opções de maneira que o investidor garanta o melhor cenário possível, surge um modelo matemático com o objetivo de tornar o aleatório, algo previsível.

Segundo Silva (2017), surgia então, na década de 1970, o modelo de Black-Scholes, com o objetivo de precificar opções de forma justa, driblando a regra de ouro do capitalismo, que diz que para obter-se lucros, deve-se correr riscos. Desenvolvido por Fischer Sheffey Black, físico matemático com doutorado em Harvard, e Myron Samuel Scholes, professor emérito de Finanças da Universidade de Stanford, auxiliados pelo economista da Universidade de Harvard Robert Carhart Merton, levou os três a conquistarem o prêmio Nobel de Economia em 1997.

O modelo de Black-Scholes segue com grande relevância no mundo das finanças atualmente. Diversos pesquisadores buscaram resolver o modelo com o objetivo de aprimorá-lo de forma analítica, numérica, estocástica, entre outras. Visto isso, o objetivo deste trabalho é mostrar uma solução exata para o modelo de Black-Scholes, através do Método Split, com o intuito de obter uma solução sem erros, de fácil implementação e baixo custo compucional para tomada de decisão em tempo hábil para o investidor. Buscar uma solução exata não garante 100% de precisão na precificação dos derivativos, visto que o Mercado financeiro é influenciado por *n* fatores distintos, inclusive fator humano, entretanto visa trazer a solução mais próxima do valor de tela (preço de mercado), minimizando danos ou maximizando lucros, em caso de uso para especulação.

## 2. METODOLOGIA

Para buscar uma solução exata, vamos resolver a equação de Black-Scholes através do método Split.

A fórmula de Black-Scholes é dada por:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} - rV(S,t) = 0 \quad , \qquad (1)$$

onde, $V$ é o valor da opção, $t$ é o tempo; $\sigma$ é a volatilidade do ativo, $S$ é o valor do ativo e $r$ é a taxa de juros. Além disso, $V(t_0) = V_0$ e $V(S, T) = max\{S - E, 0\}$, onde $T$ é o tempo de maturação e $E$ o preço de exercício.

Fazendo uma mudança de variável $V = \bar{V}e^{rt}$, substituindo na Equação (1) e fazendo as devidas simplificações obtemos:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \bar{V}}{\partial S} = 0 \quad . \qquad (2)$$

Para aplicar-se o método Split, é necessário que os operadores que compõem a EDP comutem entre si. Por se tratar de um método iterativo e recursivo, podem ser realizadas quantas iterações se achar necessário para se obter constantes arbitrárias que satisfaçam as condições iniciais e de contorno. Segundo Caurio Júnior (2024): “O Split baseia-se em aplicar a solução do sistema obtida na etapa (k) como fonte para a etapa seguinte (k + 1). Dessa forma, podemos obter diversas soluções exatas.” Para a primeira iteração, a escolha geralmente é de uma fonte constante ou nula, soluções ditas triviais.

Definimos então os operadores, da forma

$$\begin{cases} A = \frac{\partial}{\partial t} \\ B = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial}{\partial S} \end{cases} \quad . \qquad (3)$$

Verifica-se a comutatividade entre os operadores, uma vez que $AB = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^3}{\partial t \partial S^2} + rS\frac{\partial^2}{\partial t \partial S}$ e $BA = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^3}{\partial S^2 \partial t} + rS\frac{\partial^2}{\partial S \partial t}$.

Pelo teorema de Clairout-Schwartz, $f_{xy} = f_{yx}$, logo os operadores A e B comutam, ou seja, $AB = BA$. Pode-se então aplicar o método Split, criando uma sequencia recursiva da forma

$$\begin{cases} Af_{k+1} = f_k \\ Bf_{k+1} = f_k \end{cases} \quad . \qquad (4)$$

Tomando $f_0 = 0$ temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2} + rS\frac{\partial f_1}{\partial S} = 0 \end{cases} \quad . \qquad (5)$$

Integrando $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$ em relação a t, chega-se que $f_1 = g(S)$.

Logo,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 g(S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial g(S)}{\partial S} = 0 \Rightarrow S^2 g'' + \frac{2r}{\sigma^2} S g' = 0 \quad . \tag{6}$$

Nota-se que a EDO, dada pela Equação (7), está na forma da equação de Cauchy-Euler na sua forma genérica, dada por

$t^2 y'' + aty' + by = 0$, com $a = \frac{2r}{\sigma^2}$ e $b = 0$. (7)

Resolvendo nossa EDO, fazendo uma mudança de variável da forma $g = S^m$ temos

$$m(m-1)S^m + \frac{2r}{\sigma^2} m S^m = 0 \quad , \tag{8}$$

e como $S^m \neq 0$, chega-se que

$$m(m - 1 + \frac{2r}{\sigma^2}) = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \text{ e } m_2 = 1 - \frac{2r}{\sigma^2} \quad . \tag{9}$$

Como $m_1 \neq m_2$, a solução da nossa $f_1$ é dada por

$$f_1 = C_1 + C_2 S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad . \tag{10}$$

Retornando então para a variável original chega-se a uma solução exata da forma

$$V = C_1 e^{rt} + C_2 e^{rt} S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad . \tag{11}$$

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Vamos verificar que nossa solução é exata substituindo a solução encontrada na equação (1) original, na qual tem-se que

$$\frac{\partial(C_1 e^{rt} + C_2 e^{rt} S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}})}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 (C_1 e^{rt} + C_2 e^{rt} S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}})}{\partial S^2}$$

$$+ rS\frac{\partial(C_1 e^{rt} + C_2 e^{rt} S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}})}{\partial S} - r(C_1 e^{rt} + C_2 e^{rt} S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}) = 0 \quad , \tag{12}$$

então

$$C_1 r e^{rt} + C_2 r e^{rt} S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_2 e^{rt} \frac{(-2r\sigma^2 + 4r^2)}{\sigma^4} S^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

$$+ rSC_2 e^{rt} \frac{(\sigma^2 - 2r)}{\sigma^2} S^{-\frac{2r}{\sigma^2}} - C_1 r e^{rt} - C_2 r e^{rt} S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} = 0 \tag{13}$$

e agrupando os termos, fica-se com

$$\frac{(-C_2e^{rt}r\sigma^2+2C_2e^{rt}r^2)}{\sigma^2}S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}+\frac{(C_2e^{rt}r\sigma^2-2C_2e^{rt}r^2)}{\sigma^2}S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}=0 \quad . \tag{14}$$

Portanto,

$$\frac{(-C_2e^{rt}r\sigma^2+2C_2e^{rt}r^2)}{\sigma^2}S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}-\frac{(-C_2e^{rt}r\sigma^2+2C_2e^{rt}r^2)}{\sigma^2}S^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}=0 \quad . \tag{15}$$

É fácil ver que os termos se anulam e, portanto, a solução encontrada em (11) é exata.

## 4. CONCLUSÕES

Encontrar uma solução exata para a equação de Black-Scholes oferece diversas vantagens significativas. Pode-se destacar a não necessidade de: discretização do espaço-tempo; aproximação dos operadores diferenciais associados, análise de convergência, estabilidade e convergência, critérios de parada, dentre outras. Além disso, ao não depender de uma série infinita, não há necessidade de truncamento da mesma, o que também de alguma forma elimina o erro e análise do resíduo associado ao truncamento.

Uma vez que a solução exata é obtida, pode-se selecionar um ativo e utilizar os dados obtidos para precificar um derivativo de forma justa, monitorando seu preço ao longo do tempo para avaliar a precisão da solução, calculando os erros associados do modelo para diversos cenários.

Além disso, é possível realizar uma nova iteração no Método Split, utilizando a solução encontrada como nova fonte. Isso permite buscar uma solução mais abrangente, capaz de se adaptar melhor às condições de contorno, oferecendo mais constantes arbitrárias para a modelagem do problema. Como se trata de um método iterativo, pode-se repetir o processo quantas vezes for necessário, buscando a solução ideal. É crucial, no entanto, que a cada nova solução, a comutatividade dos operadores precisa ser respeitada para garantir que a nova solução seja exata.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAURIO JUNIOR, J. L. M. **Solução do Modelo de Reação-Difusão de Swanson via Split e Simetrias para Simulação da Concentração Celular do Glioblastoma Multiforme.** 2024. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

SILVA, B. F. C. **Modelo de Black – Scholes como Alternativa de Investimento para os Produtores Rurais dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.** 2017. Dissertação (Mestrado em Tecnologia, Ambiente e Sociedade) – Programa de Pós Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.