# CONCEITOS BÁSICOS DE ROTAÇÃO NO PLANO E NO ESPAÇO

CAROLINA ESTEVES DOS SANTOS[1]; LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER[2]

*[1]Universidade Federal de Pelotas– carolinaestevs@gmail.com*
*[2]Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@gmail.com*

## 1. INTRODUÇÃO

As transformações geométricas são operações que alteram a posição, o tamanho ou a forma de figuras geométricas em um espaço. Dentre os tipos de transformação, esse trabalho focará na rotação, que consiste em rotar uma figura em torno de um ponto fixo por um determinado ângulo sem alterar sua forma. Quando no plano, a rotação ocorre ao redor de um ponto, enquanto no espaço, ocorre em torno de um eixo.

A rotação em torno da origem é considerada uma transformação linear, Lima (2002) afirma que “a interconexão entre Geometria e Álgebra resultante desse ponto de vista foi responsável por extraordinários progressos na Matemática e suas aplicações”.

## 2. METODOLOGIA

Para a elaboração do presente trabalho, foram realizadas consultas em publicações relacionadas ao tema, juntamente com encontros semanais com a professora orientadora.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 3.1 Transformação de Rotação no Plano

Podemos definir como uma rotação de um ângulo θ de um vetor em torno da origem do sistema de coordenadas através da multiplicação da matriz de transformação de rotação pelas coordenadas do vetor que queremos rotacionar.

**Definição 1:** Uma transformação de rotação no plano em torno da origem do sistema de um ângulo θ no sentido anti-horário é uma aplicação **R**: $R^2 \to R^2$
tal que

$$\mathbf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A matriz

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

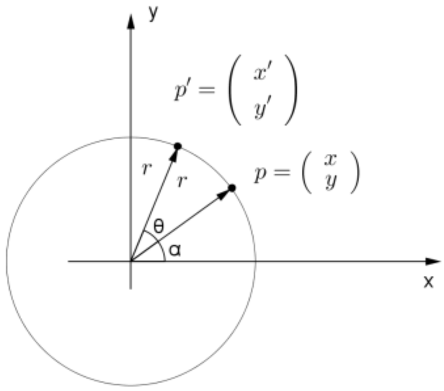
é chamada matriz de uma transformação de rotação em torno da origem em $R^2$.

**Afirmação 1:** A definição 1 está bem definida.

De fato: Utilizaremos as seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \text{sen}\,\alpha \cos\theta + \text{sen}\,\theta \cos\alpha \quad (a)$$
$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cos\theta - \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\theta \quad (b)$$

Figura 1: Transformação de Rotação no R².
Fonte: Silva, 2013.




Baseado na figura 1, podemos perceber que

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\ \text{sen}\ \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos \alpha$$

dessa forma, podemos escrever o vetor ***p*** em função seno e cosseno,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} r & \cos\theta & \alpha \\ \text{r} & \text{sen}\ \theta & \alpha \end{pmatrix}$$

Fazendo a rotação do vetor ***p*** de um ângulo θ em torno da origem temos:

$$\boldsymbol{R(p)} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} x \\ \text{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \cos(\alpha+\theta) \\ \text{r} & \text{sen}\ (\alpha+\theta) \end{pmatrix},$$

como R(p) = p’ e p’ = $\begin{pmatrix} x\prime \\ \text{y}\prime \end{pmatrix}$, podemos concluir que

$$\begin{pmatrix} x\prime \\ \text{y}\prime \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \cos(\alpha+\theta) \\ \text{r} & \text{sen}\ (\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

Utilizando as fórmulas trigonométricas (a) e (b), obtemos

$$\begin{pmatrix} x\prime \\ \text{y}\prime \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{r} \cos\theta\ \text{sen}\ \theta - \text{r sen}\ \theta \cos\theta \\ \text{r} \cos\theta\ \text{sen}\ \theta + \text{r sen}\ \theta \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Como x = r cos α e y = r sen α, temos que

$$\begin{pmatrix} x\prime \\ \text{y}\prime \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{x} \cos\theta\ \text{sen}\ \theta - \text{y sen}\ \theta \cos\theta \\ \text{x} \cos\theta\ \text{sen}\ \theta + \text{y sen}\ \theta \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \text{y} \end{pmatrix}$$

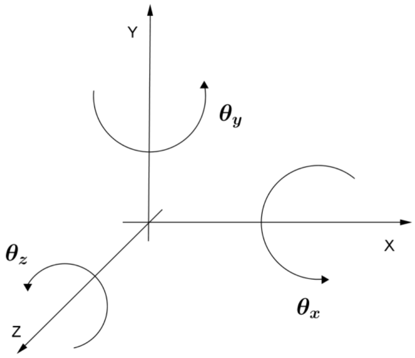
ou seja, a matriz de rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário em torno da origem é

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

**3.2 Transformação de Rotação no Espaço**

Uma forma eficiente de abordar a transformação de rotação no espaço é utilizar o exemplo ilustrado na figura 2, que traz a rotação de um objeto no espaço utilizando de três rotações em torno de cada um dos eixos cartesianos, sendo necessário atenção à ordem das rotações, já que essa altera o resultado obtido.

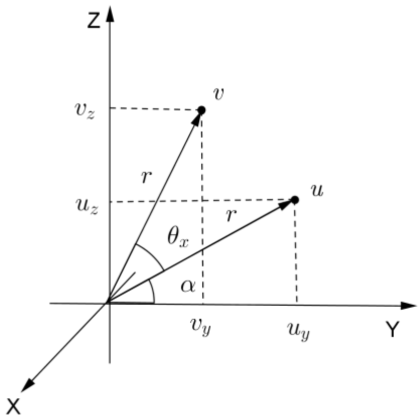
Figura 2: Rotação em torno dos eixos cartesianos.
Fonte: Silva, 2013.




**Proposição 1:** A matriz de uma transformação de rotação no espaço em relação ao eixo x é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta x & -sen\theta x \\ 0 & sen\theta x & cos\theta x \end{pmatrix}$$

Figura 3: Rotação em relação ao eixo x no espaço.
Fonte: Silva, 2013.




**Demonstração 2**: Seja o vetor $u \in R^3$, com norma igual a $r$, vamos rotacionar esse vetor $u$ em torno do eixo x de um ângulo $\theta_x$, obtendo assim o vetor $v$. Considere que $u_y$ e $u_z$ são as componentes do vetor $u$ em relação ao eixo $y$ e ao eixo $z$ respectivamente, da mesma forma que $v_y$ e $v_z$ são as componentes do vetor $v$. Assim temos que: $u_y = r \cos \alpha$, $u_z = r \text{ sen } \alpha$, $v_y = r \cos(\alpha + \theta x)$ e $v_z = r \text{ sen }(\alpha + \theta x)$.

Utilizando as identidades trigonométricas (a) e (b), obtemos:

$$v_y = r \cos(\alpha + \theta x)$$
$$\Rightarrow v_y = r(\cos \alpha \cos \theta x - \text{sen } \alpha \text{ sen } \theta x)$$
$$\Rightarrow v_y = r \cos \alpha \cos \theta x - r \text{ sen } \alpha \text{ sen } \theta x$$
$$\Rightarrow v_y = uy \cos \theta x - uz \text{ sen } \theta x$$

$$v_z = r \text{ sen }(\alpha + \theta x)$$
$$\Rightarrow v_z = r(\text{sen } \alpha \cos \theta x + \text{sen } \theta x \cos \alpha)$$
$$\Rightarrow v_z = r \text{ sen } \alpha \cos \theta x + \text{sen } \theta x \cos \alpha$$
$$\Rightarrow v_z = uz \cos \theta x + uy \text{ sen } \theta x$$
$$\Rightarrow v_z = uy \text{ sen } \theta x + uz \cos \theta x$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y\, cos\theta_x - u_z\, sen\theta_x \\ u_y\, sen\theta_x + u_z cos\theta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_x & -sen\theta_x \\ 0 & sen\theta_x & cos\theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix},$$

portanto a matriz de rotação no espaço em relação ao eixo x de um ângulo $\theta_x$ é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_x & -sen\theta_x \\ 0 & sen\theta_x & cos\theta_x \end{pmatrix}$$

como queríamos demonstrar.

### 3.3. Rotação no Espaço usando os Ângulos de Euler

As rotações no espaço também podem ser descritas por meio dos ângulos de Euler, que definem uma sequência de três rotações ao redor dos diferentes eixos cartesianos.

**Definição 3:** Os ângulos de Euler são $\theta_x$, $\theta_y$ e $\theta_z$ onde suas respectivas rotações são dadas por

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta x & -sen\theta x \\ 0 & sen\theta x & cos\theta x \end{pmatrix}, \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} cos\theta y & 0 & sen\theta y \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta y & 0 & cos\theta y \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} cos\theta z & -sen\theta z & 0 \\ sen\theta z & cos\theta z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $\theta_x$, $\theta_y$, $\theta_z$ ∈ $[-\pi, \pi]$, representando rotações em torno dos eixos x, y e z respectivamente. A matriz de rotação especificada pelos ângulos de Euler será obtida pela matriz $\mathbf{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x$.

Os ângulos de Euler apresentam algumas limitações, como o *Gimbal lock,* a perda de um grau de liberdade rotacional, que acontece quando alguns dos ângulos de Euler é de 90°.

## 4. CONCLUSÕES

O estudo prévio de rotações prepara o terreno para o entendimento de conceitos e de aplicações avançadas do corpo dos quatérnions, permitindo uma transição gradual do entendimento das rotações elementares para uma ferramenta matemática mais poderosa e eficiente que pretendemos estudar na sequência.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano**. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2002.

SILVA, RF. **Transformações Geométricas no Plano e no Espaço**. 2013. 68f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Paraíba.