ASPECTOS GERAIS DO MONOPOLO MAGNÉTICO ABELIANO DE WU-YANG E A QUANTIZAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA

PABLO RODRIGUES[1]; WERNER SAUTER[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – pablo.carlos@hotmail.com
[3]Universidade Federal de Pelotas – werner.sauter@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O primeiro trabalho bem fundamentado do ponto de vista da física teórica, que explica a possível existência dos monopolos magnéticos na natureza, foi o artigo publicado por DIRAC (1931). Nesse trabalho, Dirac introduziu uma teoria sobre o motivo das cargas elétricas serem quantizadas, estabelecendo uma relação intrínseca entre a carga elétrica e a (possível) carga magnética, por meio de uma condição de quantização. Essa condição implica que a existência de monopolos resultaria na quantização natural da carga elétrica: $\bar{e}\,g = n\,\hbar\,c/2$, onde $\bar{e}$ é a carga elétrica, g a carga magnética, $\hbar$ a constante de Planck reduzida, c a velocidade da luz e n um inteiro positivo.

Dirac argumentou que a presença de um monopolo magnético gera uma fase não integrável na função de onda associada a uma partícula carregada, isso devido à indefinição do potencial vetor associado ao campo magnético (gerado pelo monopolo) ao longo de um conjunto de singularidades, que juntas formam a chamada *linha de Dirac do monopolo*. Essa linha representa as descontinuidades no potencial vetor, que não afetam as propriedades físicas do sistema desde que a condição de quantização seja satisfeita. Dirac também interpretou os monopolos como pontos nodais ou singularidades no campo eletromagnético, onde o potencial vetor é indefinido, fornecendo uma interpretação geométrica e topológica para a coexistência e quantização de cargas elétricas e magnéticas.

A eliminação da corda de Dirac no contexto dos monopolos magnéticos foi abordada por WU; YANG (1975), com o uso de conceitos da geometria diferencial e dos espaços fibrados. O problema central estava na singularidade associada ao potencial vetor do monopolo, onde a corda de Dirac surgia como um conjunto de pontos indefinidos no espaço. A solução proposta envolveu uma parametrização alternativa do espaço, dividindo-o em dois hemisférios, norte e sul, com potenciais vetoriais distintos para cada região, eliminando a necessidade da corda de Dirac. Essa abordagem permitiu que os potenciais fossem livres de singularidades em seus respectivos domínios, e conectados de forma suave na região de interseção no equador, por meio de uma transformação de calibre.

A construção de Wu-Yang resultou no chamado *monopolo magnético abeliano de Wu-Yang*, em que o grupo de simetria mantido é o grupo unitário $U(1)$. Dessa forma, a formulação de Wu e Yang foi uma alternativa elegante para evitar as singularidades indesejadas do potencial vetor que estavam associadas à corda de Dirac, preservando, ainda, a coerência teórica da quantização da carga magnética. A solução foi considerada uma generalização do monopolo de Dirac, propondo um tratamento geométrico mais sofisticado e livre de problemas topológicos. Neste resumo será apresentado, de forma resumida, como Wu e Yang descreveram o monopolo abeliano.

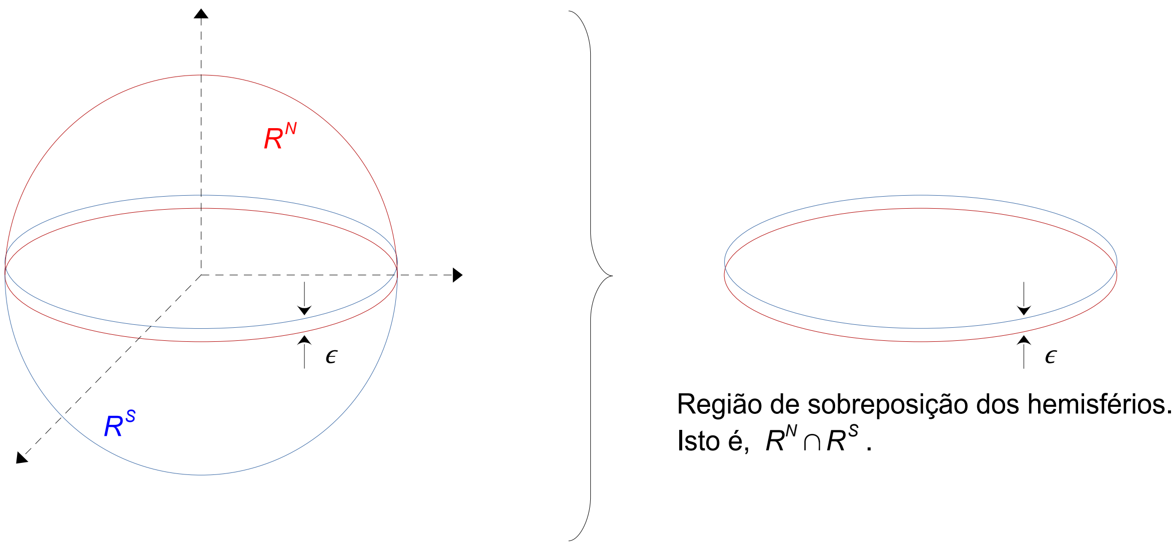
2. METODOLOGIA

O trabalho foi realizado através de uma revisão bibliográfica, em que foram estudados os principais artigos e livros acerca do tema.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Wu e Yang perceberam que a linha de Dirac do monopolo é definida sobre uma transformação de calibre, o que permite substituir a parametrização tradicional do espaço $\mathbb{R}^3/\{0\}$, que envolve o monopolo, por um único conjunto de coordenadas. Tal substituição está fundamentada na ideia de dividir o espaço em dois hemisférios, norte (R^N) e sul (R^S), que são levemente sobrepostos. A região de intersecção de tais polos, chamada região equatorial, será $R^N \cap R^S$. Com efeito, toda a região que circunda o monopolo está contida no espaço em que os dois hemisférios delimitam. A Figura 1 abaixo ilustra a situação.

Figura 1: Ilustração dos dois hemisférios divididos e levemente sobrepostos, em vermelho o hemisfério norte e em azul o hemisfério sul.



Agora, é possível parametrizar os dois hemisférios separadamente, o que permite a construção de dois potenciais vetores, $\vec{A}_N$ e $\vec{A}_S$, que são livres de singularidades em todo o domínio que estão definidos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_N = g \dfrac{(1-\cos(\theta))}{r\ \mathrm{sen}(\theta)} \hat{e}_\phi \text{, para } 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} \quad : R^N; \\ \\ \vec{A}_S = -g \dfrac{(1+\cos(\theta))}{r\ \mathrm{sen}(\theta)} \hat{e}_\phi \text{, para } \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\epsilon}{2} < \theta \leq \pi \quad : R^S. \end{array} \right. \tag{1}$$

Ambos os potenciais são bem definidos na região de intersecção $R^N \cap R^S$, além de existir uma transformação de calibre que os conectam:

$$\vec{A}_S \;\rightarrow\; \vec{A}_S - \frac{i}{\bar{e}} \exp\left(-2\, i\, \bar{e}\, g\, \phi\right) \nabla \left[\exp\left(2\, i\, \bar{e}\, g\, \phi\right)\right] = \vec{A}_N. \qquad (2)$$

A partir do que foi apresentado, em particular as expressões (1) e (2), é possível resgatar a condição de quantização de Dirac para a carga elétrica. Vamos considerar um caminho fechado *l*, na forma de um laço, inteiramente contido na região de sobreposição dos hemisférios. Caso uma partícula dotada de carga elétrica, que inicialmente possui uma função de onda ψ_1 associada, passe ao longo desse laço, a lagrangeana responsável por sua descrição é

$$L = \frac{1}{2} m\, \dot{\boldsymbol{r}}^2 + \bar{e}\, \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}, \qquad (3)$$

onde o potencial vetor $\boldsymbol{A}$ é dado por:

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_N \;: R^N \\ \\ \vec{A}_S \;: R^S \end{array} \right| ,$$

e de acordo com o termo de interação carga-monopolo $\bar{e}\, \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}$, a função de onda ψ_1 inicialmente associada a carga elétrica, adquire o seguinte fator de fase:

$$\bar{e} \int_0^T dt\, \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} = \bar{e} \int_l d\, \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} = S, \qquad (4)$$

que equivale a uma parte da ação de uma partícula inserida no campo de um monopolo. Isto é, $\psi_1 \;\rightarrow\; \psi = \psi_1 e^{iS}$ tal que $|\psi| = |\psi_1|$ e e^{iS} a amplitude física.

Como o potencial vetor $\boldsymbol{A}$ assume formas diferentes dependendo do hemisfério, $\vec{A}_N$ ou $\vec{A}_S$, o efeito da interação carga-monopolo será diferente em cada uma dessas regiões. Com efeito, haverá um limite para a ação referente a uma carga inserida no campo de um monopolo, (4), que não deve afetar qualquer tipo de observável físico. Esse limite é dado por:

$$\Delta S = \bar{e} \underbrace{\int_{R^N \cup R^S} d\, \vec{s} \cdot \vec{B} = \bar{e} \overbrace{\int_{R^N \cup R^S} d^3 r\, \nabla \cdot \vec{B}}^{4\pi g}}_{\text{Teorema de Gauss}} = 4\, \pi\, \bar{e}\, g. \qquad (5)$$

.

De acordo com SHNIR (2005) em mecânica quântica, no geral, uma amplitude física é definida pela exponencial da ação ($\sim e^{iS}$), como comentado anteriormente. O que significa invariância caso a mudança da ação, ΔS, for um múltiplo de 2π. Ou seja, obtemos a condição de quantização de carga:

$$\begin{aligned} &\Delta S = 4\, \pi\, \bar{e}\, g = 2\, \pi\, n \;\rightarrow \\ &\rightarrow\; \bar{e}\, g = \frac{n}{2};\; n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \qquad (6)$$

4. CONCLUSÕES

Os conteúdos discutidos nesse resumo, compõem os aspectos básicos e iniciais da construção de uma teoria que permitirá a descrição topológica e generalizada do monopolo de Dirac. Dessa forma, os próximos passos do projeto serão compostos por estudos detalhados e o entendimento das raízes topológicas do monopolo magnético, tendo como referência primária o livro do SHNIR (2005).

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SHNIR, Y. M. Magnetic Monopoles. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

DIRAC, P.A.M. Quantized Singularities in the Electromagnetic Field. Proceedings of the Royal Society A, London, v.133, p. 60 – 72, 1931.

WU, T. T.; YANG, C. N. Dirac Monopole Without Strings: Monopole Harmonics. Nuclear Physics B, North-Holland, v.107, p. 365 – 380, 1976.