

## ANÁLISE DE BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS E CONTÍNUOS

LEONARDO V. GONÇALVES<sup>1</sup>; ALEXANDRE MOLTER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Universidade Federal de Pelotas – lvgoncalves@inf.ufpel.edu.br*

<sup>2</sup>*Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@ufpel.edu.br*

### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho explora aspectos fundamentais da matemática aplicada, focando em sistemas dinâmicos não lineares. O estudo desses sistemas se baseia na estabilidade, onde a dinâmica pode ser discreta ou contínua. Na dinâmica discreta, a análise de estabilidade utiliza o Teorema do Ponto Fixo (MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, 2014). Já na dinâmica contínua, várias análises podem verificar a estabilidade, sendo de interesse a análise de bifurcações, discutida por LIU; HETHCOTE; LEVIN (1987), LIU (1994) e STROGATZ (1994), e a aparição de ciclos limite. A análise de bifurcação examina como pequenas variações nos parâmetros podem gerar mudanças significativas, permitindo prever transições críticas.

O objetivo deste trabalho é apresentar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo, além de discutir sobre bifurcações de Hopf em sistemas contínuos. Serão também apresentadas simulações numéricas para ilustrar os resultados teóricos estudados.

### 2. METODOLOGIA

Nesta seção, será apresentado o Teorema do Ponto Fixo, que é utilizado para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos e a teoria das bifurcações de Hopf, que é utilizada para análise de bifurcações em sistemas contínuos.

Uma equação de diferença não linear de 1<sup>a</sup> ordem é uma recorrência do tipo:

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad (1)$$

onde  $f$  é uma combinação não linear de  $y_n$ . A solução dessa equação é uma expressão que relaciona  $y_n$  com  $y_0$  (a condição inicial) para cada estágio  $n$ .

Uma abordagem útil para analisar essas equações é por meio de seus pontos fixos. No contexto das equações de diferenças, a estabilidade do processo ocorre quando não há variação entre os estágios  $n$  e  $n+1$ , ou seja, quando:

$$y_{n+1} = y_n = y^*. \quad (2)$$

Teorema (MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, 2014): Seja  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma função contínua, nestas condições, existe pelo menos um ponto  $p \in [a, b]$  tal que  $f(p) = p$ .

Demonstração: Analisando os limites do intervalo de  $f$ , se  $f(a) = a$  ou  $f(b) = b$ , o limite do intervalo já é o próprio ponto fixo. Do contrário temos que  $f(a) > a$  e  $f(b) < b$ . Considerando a função auxiliar  $h(x) = f(x) - x$ , onde  $h$  é contínua, então:  $h(a) = f(a) - a > 0$  e  $h(b) = f(b) - b < 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário (LIMA, 2006), a função  $h$  zera em um valor  $p \in (a, b)$ . Se  $h(p) = 0$ , então  $f(p) - p = 0 \Rightarrow f(p) = p$ . Logo obtemos o ponto fixo de  $f$  e provamos o teorema.

Seja  $y^* = p$ , a estabilidade de um ponto fixo pode ser determinada pelo valor do módulo de:

$$\lambda = \left. \frac{df(y_n)}{dy_n} \right|_{y_n=y^*}. \quad (3)$$

Considere  $\lambda$  é o autovalor do equilíbrio  $y^*$ . Então, se  $0 < |\lambda| < 1$ ,  $y^*$  é localmente assintoticamente estável (atrator). Se  $|\lambda| > 1$ , o ponto de equilíbrio  $y^*$  é instável (repulsor). Se  $|\lambda| = 1$ , o ponto de equilíbrio é estável. Neste caso, a sequência  $y_n$ , a partir de algum  $n$ , oscila em torno do ponto  $y^*$  denominado centro de um ciclo limite.

Em sistemas dinâmicos contínuos a análise de estabilidade é frequentemente realizada através da análise dos autovalores da matriz jacobiana do sistema no ponto de equilíbrio. Se todos os autovalores têm parte real negativa, o sistema é estável, se ao menos um possui parte real positiva, o sistema é instável. Quando um par de autovalores complexos cruza o eixo imaginário, mantendo os demais com partes reais negativas, ocorre a bifurcação de Hopf. A bifurcação de Hopf é um dos principais mecanismos que explica a transição de estabilidade em sistemas dinâmicos contínuos, resultando no aparecimento de ciclos limites, que são órbitas periódicas em torno do ponto de equilíbrio. O critério de LIU (1994) evita o cálculo direto dos autovalores, utilizando as seguintes condições:

**Condição 1:** expressa pelos subdeterminantes da matriz de Hurwitz

$$D_1(\mu_0) > 0, D_2(\mu_0) > 0, \dots, \text{e } D_{n-1}(\mu_0) = 0. \quad (4)$$

**Condição 2:**  $\frac{d D_{n-1}}{d\mu} \neq 0$ , em  $\mu = \mu_0$ , (5)

onde  $\mu_0$  é o ponto crítico onde o sistema possui um par de autovalores puramente imaginários.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como exemplo do comportamento dinâmico discreto, utilizamos o modelo logístico discreto. Representado pela equação:

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), \quad (6)$$

Com base nos cálculos dos pontos de equilíbrio e na análise de estabilidade, a seguir, apresentamos os resultados obtidos para diferentes intervalos do parâmetro  $r$ . Para encontrar os pontos fixos, resolvemos a equação (6) aplicando (2). Isso resulta em dois pontos fixo,  $y_1^* = 0$  e  $y_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ .

A análise da estabilidade desses pontos é feita através dos autovalores da equação (6), dado por  $\lambda = r - 2ry_n$ , substituindo os valores dos pontos fixos, para  $y_1^*$  temos  $\lambda_1 = r$  e para  $y_2^*$  temos  $\lambda_2 = 2 - r$ . Podemos concluir que quando  $0 < r < 1$ ,  $y_1^*$  é assintoticamente estável, e  $y_2^*$  é instável. Quando  $r = 1$ ,  $y_1^* = y_2^* = 0$  é um centro de um ciclo limite. Quando  $r > 1$ ,  $y_1^*$  é instável, e o ponto  $y_2^*$  é assintoticamente estável se  $1 < r < 3$ . Quando  $r = 3$ ,  $y_2^* = \frac{2}{3}$  e  $\lambda_2 = -1$ , o que gera um ciclo de período 2, ou seja,  $f(f(y_n)) = y_n$  e  $y_2^* = f(f(y_2^*))$  é um ponto fixo de  $f^2$ . Quando  $r > 3$ , o comportamento da população começa a exibir bifurcações sucessivas, levando a ciclos de período maior, podendo ser visualizados por meio de simulações, iterando a função logística. Esses ciclos indicam que a população oscila entre múltiplos pontos diferentes ao longo do tempo.

À medida que o valor de  $r$  continua a aumentar, o sistema se aproxima de um

comportamento caótico, no qual as oscilações se tornam irregulares e imprevisíveis e que podemos ver na Figura 1.

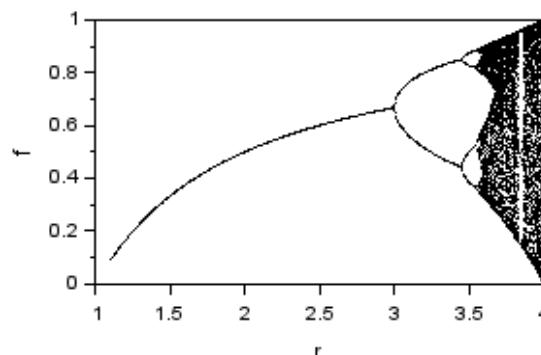


Figura 1: Diagrama de bifurcações do modelo logístico discreto.

Como exemplo do comportamento dinâmico contínuo, que exibe uma bifurcação de Hopf, pode ser dado pelo sistema de equações diferenciais não lineares:

$$x' = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \quad y' = x + \mu y - y(x^2 + y^2), \quad (7)$$

onde a origem,  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ , é um ponto de equilíbrio para qualquer valor de  $\mu$ . O polinômio característico da matriz jacobiana  $J(0, 0)$  é:

$$\lambda^2 - 2\mu\lambda + (\mu^2 + 1) = 0, \quad (8)$$

cujo os autovalores são  $\lambda = \mu \pm i$ .

Para a bifurcação de Hopf ocorrer o sistema precisa ter um par de autovalores puramente imaginários. Isso acontece quando  $\mu = 0 = \mu_0$ . E precisa também que a derivada de  $D_{n-1}$  seja diferente de zero. Neste caso,  $[D_{n-1}]'$ , em termos dos coeficientes do polinômio característico (8), é dado por:

$$[-2\mu - (\mu^2 + 1)]', \quad (9)$$

onde o ponto  $\mu_0$  assume o valor de  $-2$ . Assim, de acordo com o Critério de LIU (1994) uma bifurcação de Hopf ocorre em  $\mu = 0$ . Que podemos ver na Figura 2 (a).

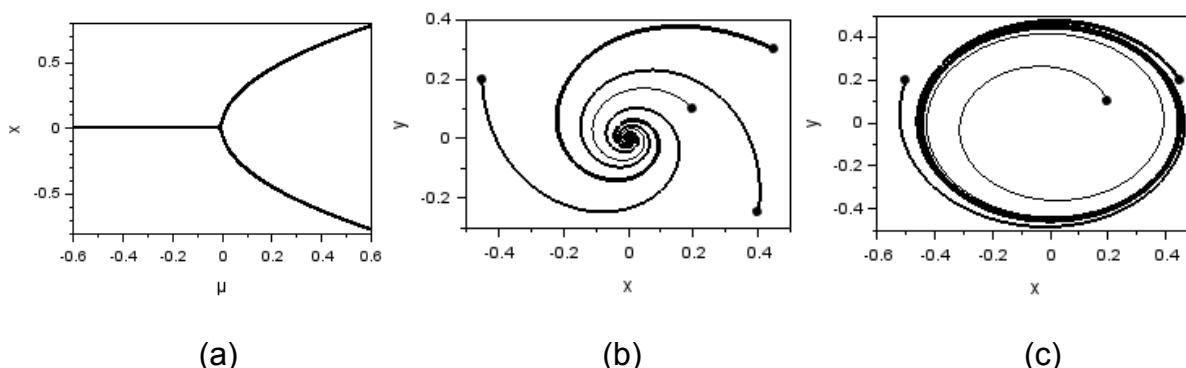


Figura 2: (a) bifurcações de hopf do sistema (7); (b) trajetórias do retrato de fase com diferentes condições iniciais, ponto atrator; (c) trajetórias do retrato de fase com diferentes condições iniciais, ciclo limite.

As Figuras 2 (b) e (c), mostram os retratos de fase para  $\mu$  antes e depois da bifurcação respectivamente. Quando  $\mu < 0$  a origem é uma espiral estável. Para  $\mu > 0$



há uma espiral instável na origem e um ciclo limite circular estável, que é a definição de uma bifurcação de Hopf supercrítica. Por outro lado, se fosse uma bifurcação subcrítica, o ciclo limite que surgiria seria instável e o sistema exibiria uma transição mais abrupta.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram analisados comportamentos de sistemas dinâmicos discretos e contínuos. Dois exemplos foram apresentados para ilustrar o aparecimento de bifurcações. Os modelos apresentados revelam uma rica diversidade de comportamentos dinâmicos, que variam desde a estabilidade e crescimento até ciclos periódicos e comportamento caótico, dependendo do valor do parâmetro. Essa análise é fundamental para entender como pequenas mudanças nos parâmetros de crescimento podem resultar em transições dinâmicas significativas.

Para trabalhos futuros serão realizados estudos com dinâmicas populacionais e feitas mais análises sobre os sistemas, como a estabilidade global.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. New York: Perseus Books Publishing, 1994.

LIU, W; HETHCOTE, H. W.; LEVIN, S. A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. **Journal of Mathematical Biology**, Berlin, v.25, n.4, 359-380, 1987.

LIU, W. Criterion of Hopf Bifurcations without Using Eigenvalues. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v.182, n.1, 250-256, 1994.

MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, C. F. Teorema do ponto fixo de brouwer. **Cadernos do IME - Série Matemática**, Rio de Janeiro, v.8, n.2, 39-56, 2014.

LIMA, E. L. **Análise Real. Volume 1: Funções de Uma Variável**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.