

## DINÂMICA DE MANIPULADOR PLANAR DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

ISADORA VENZKE DIAS<sup>1</sup>; VICTOR RAFAEL SECUNDINO SANTOS<sup>2</sup>;  
ALEXANDRE MOLTER<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Curso de Engenharia da Computação/UFPEL– ivdias@inf.ufpel.edu.br

<sup>2</sup>Curso de Engenharia da Computação/UFPEL– vrssantos@inf.ufpel.edu.br

<sup>3</sup>Instituto de Física e Matemática- IFM/UFPEL– alexandre.molter@ufpel.edu.br

### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta os estudos realizados sobre um manipulador robótico planar de dois elos, com a aplicação dos conceitos da dinâmica para estabelecer o movimento do efetuador final. O objetivo do estudo é desenvolver um algoritmo para simular o movimento do braço robótico utilizando o *software* numérico MATLAB.

Como base para o estudo e as simulações computacionais, foi utilizado o livro de SICILIANO et al. (2010). A partir das informações teóricas foram conduzidas análises, visando solucionar o modelo dinâmico deste manipulador, composto por equações diferenciais não lineares, de segunda ordem. Restrições, como o espaço de trabalho do robô, foram incluídas na formulação do código computacional.

A integração das equações diferenciais foi feita utilizando o método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem. Alguns resultados são apresentados e discutidos ao longo deste trabalho.

### 2. METODOLOGIA

Afim de alcançar os objetivos propostos, a metodologia adotada consiste no estudo do livro de SICILIANO et al. (2010), principalmente o capítulo 7, onde ocorre o desenvolvimento teórico da dinâmica de robôs. Além do texto base, outros livros foram estudados, como os de CRAIG (2012) e SPONG et al. (2020), ambos livros de robótica.

As equações descritas neste trabalho são as utilizadas por SICILIANO et al. (2010). A equação do movimento que descreve a dinâmica no espaço das juntas, de forma compacta, em representação matricial, é dada por:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q)h_e, \quad (1)$$

onde,  $B(q)$  é a matriz de inércia,  $C(q, \dot{q})$  é a matriz com os símbolos de Christoffel e  $\tau$  são os torques aplicados nas juntas. Para o caso específico em estudo, alguns termos não foram utilizados na simulação, sendo eles os dois coeficientes de fricção  $F_v\dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q})$ , e o vetor de força e momento exercidos pelo efetuador final no ambiente  $J^T(q)h_e$ . As variáveis das juntas são  $q = [\vartheta_1 \ \vartheta_2]^T$ .

Após o cálculo da matriz de Inércia  $B(q)$  e da matriz  $C(q, \dot{q})$ , os torques aplicados nas juntas resultam em duas equações diferenciais de segunda ordem, dadas por:

$$(I_{l1} + m_{l1}l_1^2 + k_{r1}^2 I_{m1} + I_{l2} + m_{l2}(a_1^2 + l_2^2 + 2a_1l_2c_2) + I_{m2} + m_{m2}a_1^2)\ddot{\vartheta}_1 \\ + (I_{l2} + m_{l2}(l_2^2 + a_1l_2c_2) + k_{r2}^2 I_{m2})\ddot{\vartheta}_2$$

$$-2m_{l2}a_1l_2s_2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - m_{l2}a_1l_2s_2\dot{\vartheta}_2^2 + (m_{l1}l_1 + m_{m2}a_1 + m_{l2}a_1)gc_1 + m_{l2}l_2gc_{12} = \tau_1, \quad (2)$$

$$(I_{l2} + m_{l2}(l_2^2 + a_1l_2c_2) + k_{r2}I_{m2})\ddot{\vartheta}_1 + (I_{l2} + m_{l2}l_2^2 + k_{r2}^2I_{m2})\ddot{\vartheta}_2 + m_{l2}a_1l_2s_2\dot{\vartheta}_1^2 + m_{l2}l_2gc_{12} = \tau_2. \quad (3)$$

As coeficientes das equações (2) e (3) são descritos na tabela que segue:

Coeficiente	Descrição
$a_1, a_2$	Comprimento dos elos
$l_1, l_2$	Comprimentos entre o elo e o rotor
$m_{l1}, m_{l2}$	Massas dos elos
$m_{m1}, m_{m2}$	Massas dos rotores
$I_{l1}, I_{l2}$	Tensores de inércia relativos aos elos
$I_{m1}, I_{m2}$	Tensores de inércia dos rotores relativos aos centros de massa
$k_{r1}, k_{r2}$	Relações de redução de marcha
$c, s$	Abreviações para cosseno e seno
$\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \ddot{\vartheta}_1, \ddot{\vartheta}_2$	Velocidades e acelerações angulares do rotor

Com base nas equações (2) e (3), o sistema (1) é estruturado em equações diferenciais de primeira ordem usando matrizes em blocos, o que viabiliza a utilização do método de Runge-Kutta para este caso específico. Como o sistema é não linear, a forma do espaço de estados é obtida de forma recursiva, resolvendo um sistema linear para cada passo do ângulo. A função é construída da seguinte forma:

$$Y = Ay - Bg_{vet} + Bu, \quad (4)$$

onde  $A$  e  $B$  correspondem às duas matrizes e  $y$ ,  $g_{vet}$  e  $u$  aos três vetores a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ M^{-1}0 & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad g_{vet} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Nas matrizes,  $M$  e  $C$  representam, respectivamente, a matriz de inércia de dimensões (2x2), e a matriz dos símbolos de Christoffel. Ambas são definidas num código computacional criado no *software* MATLAB, e atualizadas dinamicamente conforme seus valores são recalculados.

As aproximações calculadas pelo método são guardadas no vetor  $y$  de dimensões (4x1), que contém as posições ( $\theta_1, \theta_2$ ) e as velocidades angulares ( $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ) das juntas. Já os vetores  $u$  (2x1) e  $g_{vet}$  (2x1), possuem, respectivamente, os valores dos torques, e da componente gravitacional.

O cálculo das posições do manipulador, para cada novo ângulo, é feito por meio das equações da cinemática direta e inversa. Primeiramente, os novos

ângulos são determinados, seguidos pelo cálculo de suas respectivas posições. Por fim, o movimento do manipulador é esboçado ao longo do tempo definido pelo passo de simulação, acompanhado de gráficos selecionados para melhor visualização e compreensão do movimento.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste estudo, foram usados os valores a seguir, apresentados no exemplo do braço planar de dois elos descrito no capítulo 7 de SICILIANO et al. (2010).

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ m}; \quad l_1 = l_2 = 0,5 \text{ m}; \quad m_{l1} = m_{l2} = 50 \text{ kg}; \quad I_{l1} = I_{l2} = 10 \text{ kgm}^2; \\ k_{r1} = k_{r2} = 100; \quad m_{m1} = m_{m2} = 5 \text{ kg}; \quad I_{m1} = I_{m2} = 0,01 \text{ kgm}^2. \quad (7)$$

Neste exemplo, a ponta do manipulador está localizada em (0; 0,2) em uma posição de cotovelo baixo, com ambas as juntas movendo-se para uma posição final correspondente a  $\pi/2$  radianos.

A figura 1 ilustra o movimento do efetuador final, juntamente com as posições finais dos elos. O primeiro elo é representado pela linha vermelha, enquanto o segundo elo é indicado pela linha azul. A trajetória percorrida pelo efetuador final no plano cartesiano (xOy) é destacada em verde, com sua posição inicial marcada por um quadrado vermelho.

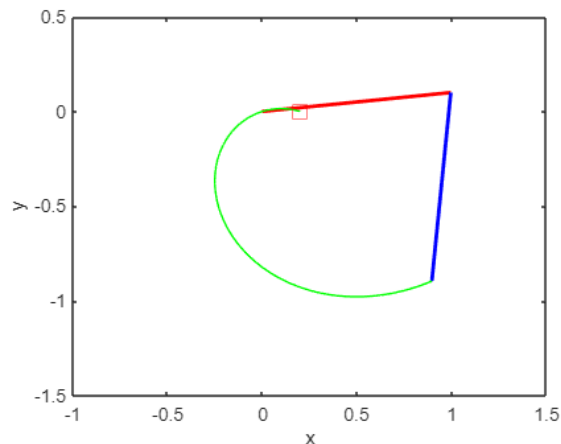


Figura 1: movimento do efetuador final do manipulador. Fonte: do Autor

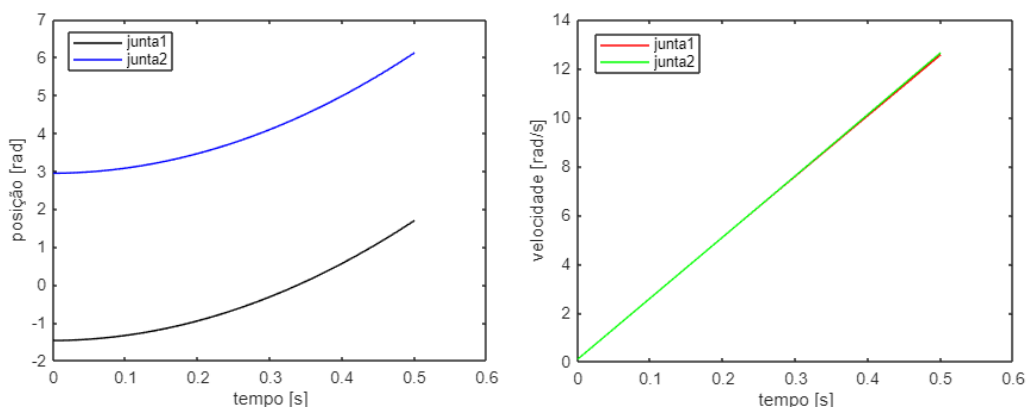
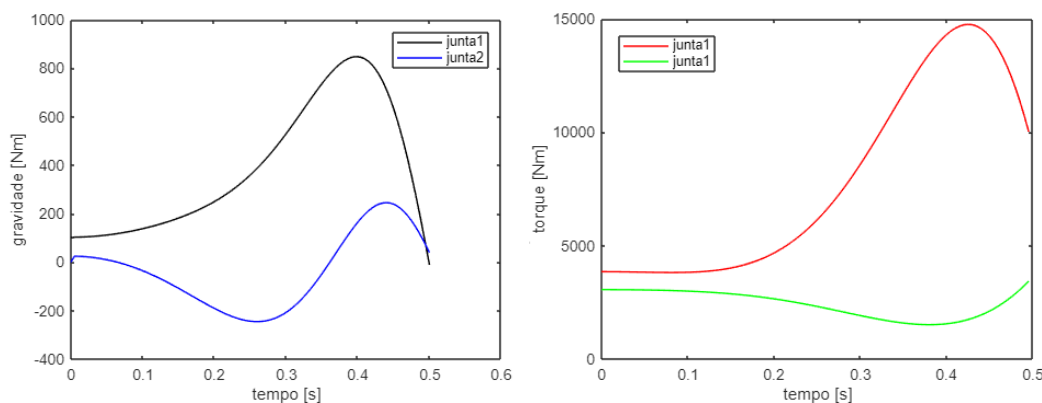


Figura 2: a figura da esquerda representa a posição das juntas e a figura da direita representa a velocidades das juntas. Fonte: do Autor

A figura 2, ilustra o comportamento das componentes de posição e velocidade angular das juntas. Conforme mostrado nos gráficos, os resultados obtidos com a aplicação do método de Runge-Kutta exibem, respectivamente, as curvas em crescimento contínuo até o fim do período estipulado de 0,5 segundos.



Figuras 3: a figura à esquerda representa a componente gravitacional e a figura à direita representa os torques aplicados às juntas. Fonte: do Autor.

Na figura 3 são apresentados os gráficos referentes à componente gravitacional e aos torques aplicados as juntas, ambos exibindo variações ao longo do período de 0,5 segundos. Os gráficos ilustram como os torques e as forças gravitacionais evoluem durante o intervalo de simulação, oferecendo uma visão detalhada do comportamento dinâmico do manipulador ao longo do tempo.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi implementado um código computacional no *software* numérico MATLAB, para a simulação dinâmica de um manipulador robótico planar de dois elos, aplicando o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem na resolução do sistema de equações diferenciais.

A ideia principal foi replicar o exemplo do livro SICILIANO et al. (2010), para validar a nossa implementação e aplicação dos conceitos da dinâmica, e resolver um modelo de equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem.

O estudo contribui para a compreensão e visualização do comportamento dinâmico do manipulador, servindo como base para aplicações futuras.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G. **Robotics: Modelling, Planning and Control**. Londres: Springer, ed. 2009a, 2009.

Craig, J. J. **Robótica**. São Paulo: Pearson, 3<sup>a</sup> ed., 2012.

Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M. **Robot Modelling and Control**. New York: Wiley, 2<sup>a</sup> ed., 2020.