

## GEOMETRIA HIPERBÓLICA

GUSTAVO WEIRICH CORRÊA<sup>1</sup>; GIOVANNI DA SILVA NUNES<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – correia.gw@hotmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – nunes.giov@gmail.com

### 1. INTRODUÇÃO

Durante séculos, matemáticos se empenharam em demonstrar o quinto postulado de Euclides, presente em sua obra *Elementos*. Conhecido como axioma das paralelas, esse postulado afirma que: Se uma linha reta cai sobre duas linhas retas de forma que os ângulos internos do mesmo lado sejam menores que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, se encontram do lado onde os ângulos são menores que dois ângulos retos (Euclides, 2009).

Porém, em meio a pesquisas, pseudo provas e tentativas frustradas de provar esse axioma, geômetras como Carl Friedrich Gauss, János Bolyai e Nikolai Lobachevsky dedicaram-se a uma “nova” geometria: a geometria hiperbólica (Andrade, 2013). Os três estudiosos, mesmo separados, negaram o axioma, chegando no seguinte substituto do axioma das paralelas: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada (Barbosa, 2007).

Nesse contexto, podemos definir uma métrica como uma função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que relaciona a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado de distância de  $x$  a  $y$ , como destacado em (Lima, 1977). Uma métrica riemanniana permite definir o comprimento de uma curva, e a partir disso podemos definir uma superfície riemanniana, como mostrado em (Doria, 2019):

**Definição:** Uma superfície riemanniana é um par  $(M, g)$  onde  $M$  é uma superfície e  $g$  é uma métrica riemanniana definida sobre  $M$ .

Ao tomarmos o par  $(\mathbb{R}^2, g_e)$ , sendo  $g_e$  a métrica euclidiana, a curva de menor comprimento que liga dois pontos quaisquer é o segmento de reta que os conecta. A distância euclidiana entre eles corresponde ao comprimento desse segmento. Porém, se a métrica for diferente, o segmento de reta pode não ser o menor caminho entre dois pontos. Nesse caso, o conceito de reta é substituído pelo conceito de geodésica (Doria, 2019).

A métrica do espaço hiperbólico, que é definida por: sendo  $p = (x, y)$ ,  $u, v \in T_p \mathbb{R}^2$ . Considere  $g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$  Segue que:

$$(g_h)_{(x,y)}(u, v) = \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle. \quad (1)$$

Onde  $\langle u, v \rangle$  é o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^2$ . Essa métrica é a que dá origem à geometria hiperbólica e que respeita o postulado proposto anteriormente. O espaço hiperbólico é a superfície riemanniana  $H^2 = (\mathbb{R}^2_+, g_h)$ .

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento das geodésicas no espaço hiperbólico e refletir sobre as noções intuitivas relacionadas às “retas” hiperbólicas.

## 2. METODOLOGIA

Primeiramente, vamos definir como calcular o comprimento de uma curva no espaço hiperbólico. O comprimento de uma curva  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow H^2$ , onde  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , é dado por:

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt. \quad (2)$$

Em seguida, vamos determinar como as geodésicas de  $H^2$  se comportam de acordo com a métrica apresentada na seção anterior.

**Proposição:** Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , a geodésica ligando os pontos  $p = (a, t_0)$  e  $q = (a, t_1)$  é o segmento de reta pertencente a semirreta  $l = \{(a, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ .

**Corolário:** Os círculos cujos centros encontram-se sobre o eixo- $x$  são geodésicas de  $H^2$ .

Além disso, vamos definir como é calculada a distância entre dois pontos no plano hiperbólico, utilizando suas representações complexas para facilitar o desenvolvimento.

**Proposição:** Sejam  $p, q \in H^2$  dois pontos cujas representações como números complexos sejam  $z$  e  $w$ , respectivamente. A distância entre os pontos  $p, q \in H^2$  é

$$d_{H^2}(p, q) = \ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \quad (3)$$

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentaremos, de forma numérica, a metodologia proposta, comparando o comprimento de duas curvas: uma geodésica euclidiana (reta) e uma geodésica hiperbólica. Iremos demonstrar que, no espaço hiperbólico, a intuição nem sempre nos conduz à resposta correta.

Tomaremos dois pontos  $A, B \in H^2$  de coordenadas  $A = (1, 1)$  e  $B = (3, 1)$ . De forma intuitiva, tomariam o segmento de reta horizontal que conecta os dois pontos, na figura 1 representado por  $g_e$ . Calculando o comprimento desta curva de acordo com a equação (2), temos que:

$$\gamma_1(t) = (t, 1), \quad 1 \leq t \leq 3$$

$$L(\gamma_1) = \int_1^3 \sqrt{(t^2 + 1^2)} dt = \int_1^3 \sqrt{1^2} dt = [t]_1^3 = 2 \text{ u. c.}$$

Entretanto, ao calcularmos a distância entre esses dois pontos utilizando a equação (3), podemos perceber que o resultado encontrado não é a menor distância entre eles. Tomando  $a$  e  $b$  como as representações complexas de  $A$  e  $B$ , respectivamente, note que:

$$d_{H^2}(A, B) = \ln\left(\frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|}\right) = \ln\left(\frac{|(1+i) - (\bar{3+i})| + |(1+i) - (3+i)|}{|(1+i) - (\bar{3+i})| - |(1+i) - (3+i)|}\right)$$

$$d_{H^2}(A, B) = \ln\left(\frac{|1+i-3+i| + |1+i-3-i|}{|1+i-3+i| - |1+i-3-i|}\right) = \ln\left(\frac{|-2+2i| + |-2|}{|-2+2i| - |-2|}\right)$$

$$d_{H^2}(A, B) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \approx 1,7628 \text{ u. c.}$$

De fato, o segmento de reta horizontal não poderia ser a menor distância entre esses dois pontos, pois - como definido na seção anterior - no espaço hiperbólico apenas segmentos de reta verticais e círculos com centros sobre o eixo- $x$  são geodésicas de  $H^2$ . Nesse sentido, calcularemos o comprimento da geodésica hiperbólica - representada por  $g_h$  na figura 1 - e mostraremos que coincide com o resultado encontrado anteriormente. Novamente utilizando a equação (2), temos:

$$\gamma_2(\theta) = (\sqrt{2} \cdot \cos(\theta) + 2, \sqrt{2} \cdot \sin(\theta)), \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\gamma'_2(\theta) = (-\sqrt{2} \cdot \sin(\theta), \sqrt{2} \cdot \cos(\theta))$$

$$L(\gamma_2) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{((-\sqrt{2} \cdot \sin(\theta))^2 + (\sqrt{2} \cdot \cos(\theta))^2)}}{\sqrt{2} \cdot \sin(\theta)} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))}}{\sqrt{2} \cdot \sin(\theta)} d\theta$$

$$L(\gamma_2) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2(1)}}{\sqrt{2} \cdot \sin(\theta)} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta = \left[ \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$L(\gamma_2) = \ln\left(\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \ln\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\right) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \approx 1,7628 \text{ u. c.}$$

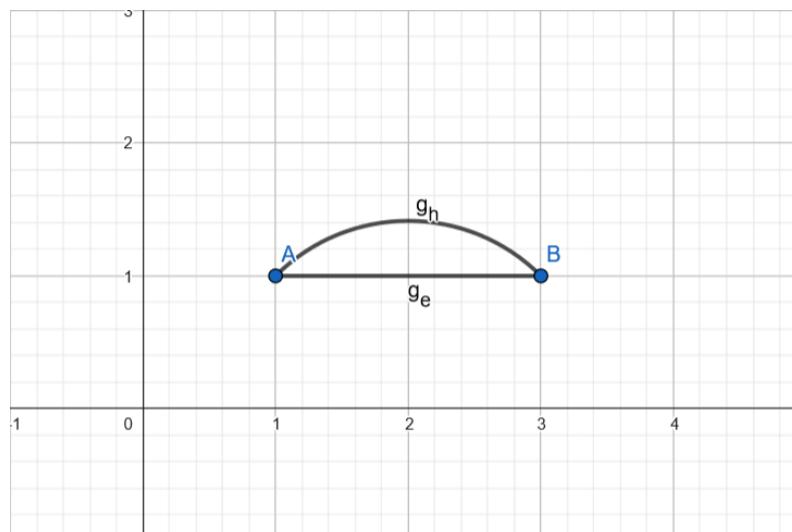


Figura 1: Comparação gráfica entre a geodésica euclidiana e hiperbólica.

#### 4. CONCLUSÕES

Como podemos perceber na seção anterior, a noção intuitiva advinda dos estudos sobre geometria euclidiana podem nos conduzir a conclusões equivocadas quando estamos trabalhando com outras geometrias. No caso da geometria hiperbólica, as geodésicas nem sempre coincidem com as geodésicas euclidianas. Desta forma, mostramos que a menor distância entre dois pontos depende da superfície em que se encontram.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, P. F. **Introdução à Geometria Hiperbólica**: O modelo de Poincaré. 1<sup>a</sup> Edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2013, 267p.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. 3<sup>a</sup>.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007, 167p.
- DORIA, C. M. **Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica**. 1<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2019, 405p.
- EUCLIDES. **Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009. 595p.
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1977, 299p.