GEOMETRIA ESFÉRICA

VICTOR CEZAR DIAS RECONDO[1]; GIOVANNI DA SILVA NUNES[2];

[1]*Universidade Federal de Pelotas – victorcezar.dias@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – nunes.giov@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

Uma métrica está totalmente relacionada com a maneira com a qual medimos distâncias. Como pode ser visto em [2] uma superfície riemanniana é um par *(M, g)* onde *M* é uma superfície e g é uma métrica riemanniana definida sobre *M*.

O estudo se deu em torno da superfície esférica, sua métrica e seu uso para calcular as distâncias entre pontos nesta superfície. Além disso houve estudo sobre geometria diferencial e seu uso na superfície esférica.

2. METODOLOGIA

O presente trabalho foi feito através da pesquisa em livros teóricos sobre matemática, todos elencados nas referências bibliográficas, juntamente com reuniões e apresentações entre orientador e orientando. Vamos definir e apresentar a fração da teoria estudada que faz jus a este trabalho.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O estudo foi feito em uma superfície regular. Temos por [1],[3] que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é diferenciável. O que significa que se escrevemos
$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v)\ z(u,v)),\ (u,v) \in U$$
As funções $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U;
2. X é um homeomorfismo. Como X é contínua pela condição 1, isto significa que X tem inversa $X^{-1} : V \cap S \to U$ que é contínua;
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação X é chamada de parametrização ou coordenadas (locais) em (uma vizinhança) p.

Com essa definição de superfície regular, nos convém também a seguinte proposição que utiliza o teorema da função inversa, relacionando assim a definição de superfície regular com subconjuntos da forma $f(x,y,z)$ igual a uma constante. A proposição nos diz que *se* $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

O nosso exemplo de maior interesse é a esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Tomando $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ temos que $f^{-1}(0)$ é a esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 1 , ou seja, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície regular.

Como apresentado em nossa definição de superfície regular, temos a parametrização destas superfícies. Como pode ser visto em [2] uma parametrização da esfera se dá por:

$$X(u, v) = (r.\cos(u)\sin(v), r.\sin(u)\sin(v), r.\cos(v)).$$

Por comodidade estamos considerando, sem perda de generalidade, a esfera de raio unitário, então ficamos com:

$$X(u, v) = (\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)).$$

Dizemos que um vetor w de $\mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em $p = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$ onde $\alpha(t) = X(u(t),v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Assim, os vetores $Xu(u_0, v_0)$ e $Xv(u_0, v_0)$ são vetores tangentes a X em (u_0, v_0), já que são tangentes às curvas coordenadas de X.

Temos que o plano tangente a X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0), que denotamos por T_pX onde $p = (u_0, v_0)$.

Dado um ponto p = (u_0,v_0), os vetores $Xu = (-\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), 0)$ e $Xv = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), -\sin(v))$ formam uma base de T_pS^2.

Com estes conceitos podemos apresentar a métrica esférica, lembrando que uma métrica riemanniana nos permite introduzir os conceitos de distância e ângulo. Assim temos que a métrica esférica é a aplicação que associa a cada ponto p $\in S^2$ o produto interno g_p: $T_p S^2 \; X \; T_p S^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$g_p(u, v) = \langle u, v\rangle.$$

Como visto anteriormente Xu,Xv formam nossa base de T_pS^2 , logo os vetores tangentes à superfície esférica no ponto p, se dão por:

$$w_1 = T_p S^2 \;\Rightarrow w_1 = a_1Xu + a_2Xv$$
$$w_2 = T_p S^2 \;\Rightarrow w_2 = b_1Xu + b_2Xv .$$

Assim,

$$\langle w_1, w_2\rangle_p = \langle a_1Xu + a_2Xv, b_1Xu + b_2Xv\rangle =$$

$$a_1b_1\langle Xu, Xu\rangle + a_1b_2\langle Xu, Xv\rangle + a_2b_1\langle Xv, Xu\rangle + a_2b_2\langle Xv, Xv\rangle.$$

Para seguirmos desenvolvendo a teoria local das superfícies, precisamos definir a primeira forma quadrática. Esta primeira forma está relacionada diretamente com comprimento de curva. Assim, seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $\forall\, p \in U$ a aplicação:

$$I_p : T_pX \to \mathbb{R}$$
$$w \to I_p(w) = \langle w, w\rangle = |w|^2$$

é denominada de primeira forma quadrática de X em p, onde $w \in TpX$.

Note que ao desenvolver a primeira forma quadrática para a esfera, teremos que a aplicação $I_q(w)$ será uma combinação linear de $\langle Xu, Xu\rangle$, $\langle Xu, Xv\rangle$, $\langle Xv, Xv\rangle$, sendo:

$$E = \langle Xu, Xu\rangle, F = \langle Xu, Xv\rangle \text{ e } G = \langle Xv, Xv\rangle.$$

Onde E,F,G são chamados de coeficientes da primeira forma quadrática.

Note os coeficientes da primeira forma aparecem de forma natural quando definimos uma métrica riemanniana.

Ao calcularmos então os coeficientes da primeira forma quadrática da nossa superfície esférica temos:

$$E(u_0, v_0) = sin^2(v_0)\ ,\ F(u_0, v_0) = 0 \text{ e } G(u_0, v_0) = 1\ .$$

Conhecendo a primeira forma fundamental, podemos calcular o comprimento entre dois pontos da nossa superfície. Seja $X(u,v)$ nossa superfície esférica. Se $\alpha(t) = X(u(t),v(t)),\ t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície então, para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t0}^{t1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t0}^{t1} \sqrt{Iq(t)\alpha'(t)}\ dt\,.$$

Onde $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superfície em $q(t) = (u(t),v(t))$.

Assim,

$$\int_{t0}^{t1} \sqrt{I_q(t)\big(\alpha'(t)\big)}\ dt =$$

$$\int_{t0}^{t1} \sqrt{\langle Xu, Xu\rangle (u'(t))^2 + \langle Xu, Xv\rangle (u'(t)v'(t)) + \langle Xv, Xv\rangle (v'(t))^2}\ dt =$$

$$\int_{t0}^{t1} \sqrt{E(u'(t))^2 + F(u'(t)v'(t)) + G(v'(t))^2}\ dt.$$

Como sabemos os valores da primeira forma quadrática da esfera, podemos substituir na integral acima. Ficamos assim com:

$$\int_{t0}^{t1} \sqrt{sin^2(v)(u'(t))^2 + 0.(u'(t)v'(t)) + (v'(t))^2}\ dt =$$

$$\int_{t0}^{t1} \sqrt{sin^2(v)(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\ dt.$$

Para fins de relações métricas, nos vale argumentar que dados os pontos $p_1 = (cos\ (u_1)sin(v_1),\ sin(u_1)sin(v_1),\ cos(v_1))$ e $p_2 = (cos(u_2)sin(v_2),\ sin(u_2)sin(v_2),\ cos(v_2)) \in S^2$ e seja α a medida do ângulo formado pelos vetores $u_1 = \overrightarrow{op1}$ e $u_2 = \overrightarrow{op2}$. A distância esférica entre p_1 e p_2 é dada pela curva de menor comprimento ligando os dois pontos. Como podemos ver em [2], este comprimento é igual a α. Ou seja, $dS^2\ (p_1, p_2) = \alpha$. Utilizamos a primeira forma quadrática para calcular o comprimento de curvas que unem dois pontos na superfície. Apresentaremos um exemplo ilustrando estes cálculos.

4. CONCLUSÕES

Temos na superfície esférica diversas curvas em função dos nossos parâmetros *u,v*. Fixando $v = \frac{\alpha}{2}$, podemos associar dois vetores $u_1 = \overrightarrow{op1}$ e $u_2 = \overrightarrow{op2}$ pontos p_1 e p_2, tal $p_1 \neq p_2$, da nossa esfera. Vamos supor que estes pontos possuem um meridiano e um paralelo em comum.

Temos neste caso que $dS^2\ (p_1,\ p_2) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

Seja β o paralelo passando por p_1 e p_2, vamos calcular o comprimento de β de p_1 até p_2 utilizando a métrica esférica vista anteriormente. Desta forma, temos:

$$L(\beta) = \int_{0}^{\pi} \sqrt{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\ \ dt = \int_{0}^{\pi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \ dt = \ t \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$L(\beta) = \ \pi . sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Agora considere a função $f(x) = \pi\, sin\left(\frac{x}{2}\right) - x$. Temos que esta função é não negativa para $0 \leq x \leq \ \pi$.

Note que, em nossa função $f(x) = \pi\, sin\left(\frac{x}{2}\right) - x$ ao calcularmos $f(\alpha)$ temos $f(\alpha) = \pi . sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$, sendo $\alpha \ \in \ [0,\pi]$. Assim, como sabemos que nossa função é não negativa, necessariamente $\pi . sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$ tem que ser maior ou igual a zero. Portanto, necessariamente, $\pi . sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ deve ser maior ou igual a α.

Ou seja, o comprimento de β é maior que a distância de p_1 até p_2.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CARMO, M. P. D. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 6ª edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2014, 620 p.

[2] DORIA, C. M. Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica. 1ª edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2019, 405 p.

[3] TENENBLAT, K. Introdução à Geometria Diferencial. 1ª reimpressão. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1990, 278 p.

.