

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA EQUAÇÕES DE DIFUSÃO EM DOMÍNIO INFINITO VIA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

ELISIANE COGOY DA SILVA¹; LESLIE D. PEREZ-FERNANDEZ²

¹Universidade Federal de Pelotas - UFPEL – elisics@hotmail.com

²Universidade Federal de Pelotas - UFPEL – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma análise de algumas questões utilizadas na resolução de problemas envolvendo a equação de difusão, que é fundamental para descrever processos de transporte em diversos campos, como física, química, biologia, engenharia e finanças. Compreender suas soluções é essencial, podendo transformá-lo em uma ferramenta valiosa tanto para a comunidade acadêmica quanto para a prática profissional, pois facilita a aprendizagem, a aplicação e a pesquisa sobre a busca de difusão, contribuindo para o avanço do conhecimento e promovendo a conexão entre teoria e prática, fundamental para o desenvolvimento de soluções inovadoras e eficazes.

Ainda, como descrito por Feynman em suas famosas *Lectures on Physics* (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2013), fenômenos difusivos desempenham um papel crucial em diversas áreas científicas. A difusão é essencial na explicação de processos como a transferência de calor em materiais sólidos, a condução elétrica em semicondutores, a propagação de partículas em meios heterogêneos e a polarização dielétrica. Feynman também destacou a importância da difusão em processos químicos, como a mistura de produtos em soluções. Esses exemplos ilustram as características dos aspectos difusivos e a relevância de compreendê-los para avançar em múltiplas áreas do conhecimento científico e tecnológico.

A relevância deste estudo está na aplicação prática das soluções encontradas para problemas reais, como na ecologia espacial e biologia evolutiva (LAM; LOU, 2022), na condução do calor (FOURIER, 1822; HAHN; ÖZISIK, 2012), em características atmosféricas (HANNA; BRIGGS; HOSKER, 1982), incluindo características meteorológicas (STULL, 1988) e dispersão de partículas (ARYA, 1998; MING et. al., 2017), em características geológicas como a transferência de calor por condução em intrusões magnéticas (COSTA et al., 2023), e na restauração e interpolação de imagens (BARBU, 2019).

2. METODOLOGIA

Neste trabalho, estudaremos a resolução de problemas de valores iniciais e de contorno para equações de difusão em domínios unidimensionais espacialmente infinitos, homogêneas e não homogêneas, com condições iniciais homogêneas e não homogêneas. Cada método de resolução será aplicado a problemas específicos para demonstrar sua eficácia e limitações por meio de exemplos ilustrativos, cujos resultados serão analisados. No primeiro caso, para resolver o problema com equação homogênea e condição inicial não homogênea,

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

em que $u(x, t)$ é a densidade da grandeza difundida, x é a posição, t é o tempo e k é a difusividade. Para resolver o problema, consideraremos o seguinte problema auxiliar no qual a condição inicial é uma condição de salto em $x = 0$, também conhecida como função de Heaviside $H(x)$:

$$w_t - kw_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$w(x, 0) = w_0 H(x),$$

em que $w(x, t)$ e w_0 são densidades. Se w é a solução desse problema, então sua derivada em relação a x também é solução da sua equação, a qual, para $w_0 = 1$, fornece a chamada solução fundamental da equação de difusão:

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

A função $G(x, t)$ representa a distribuição da densidade que resulta de uma fonte pontual unitária ($w_0 = 1$) localizada em $x = 0$. Se a fonte estiver localizada na posição $x = y$, essa solução aparece deslocada como $G(x - y, t)$. Ainda, se a fonte deslocada for de magnitude $w_0 = u_0(y)$, a solução é $u_0(y)G(x - y, t)$. Assim, a solução $u(x, t)$ do problema original é a superposição em $\mathbb{R} \ni y$ de todas as soluções $u_0(y)G(x - y, t)$ correspondentes às fontes pontuais:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) G(x - y, t) dy,$$

No segundo caso, para o problema com equação não homogênea e condição inicial homogênea

$$u_t - ku_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

foi aplicado o Princípio de Duhamel para encontrar sua solução em termos da solução do problema do primeiro caso como:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau) G(x - y, t - \tau) dy d\tau.$$

No terceiro caso, para o problema com equação não homogênea e condição inicial não homogênea

$$u_t - ku_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

utilizamos o princípio de superposição das soluções dos dois problemas anteriores para encontrar a solução como:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau) G(x - y, t - \tau) dy d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) G(x - y, t) dy.$$

2. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, apresentamos exemplos para os três casos considerando três condições iniciais (periódica, antissimétrica e simétrica) e dois termos fonte (temporalmente decrescente e espacialmente antissimétrica, e temporalmente crescente e espacialmente simétrica).

Para o primeiro caso, a figura 1 mostra que, para as três condições iniciais, a solução tende ao estado de equilíbrio em que a densidade está uniformemente distribuída. Na condição gaussiana, a região de maior densidade está no centro do domínio e se espalha em direção às extremidades. Na arcotangente, as regiões de maior e menor densidade estão nas extremidades e se espalham em direção ao centro do domínio. Na condição senoidal, o comportamento é semelhante ao da arcotangente; no entanto, a distribuição de densidades máximas e mínimas ocorre localmente de forma periódica.

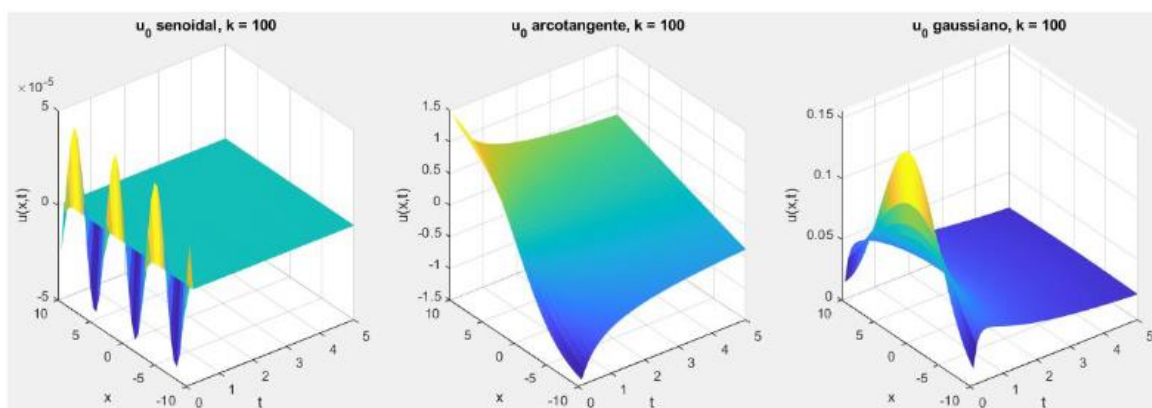


Figura 1. Caso 1: Solução $u(x,t)$ do problema com $k = 100$ e condição inicial $u_0(x) = \sin x$ (esquerda), $u_0(x) = \arctan x$ (centro), $u_0(x) = e^{-x^2}$ (direita).

Para o segundo caso, a figura 2 mostra que a dispersão é rápida devido ao grande valor de k . Para fonte $f(x,t) = e^{-t} \operatorname{arccot} x$, a amplitude decresce exponencialmente com t , enquanto para a fonte $f(x,t) = t(1 - e^{-x^2})$, a amplitude cresce linearmente com t .

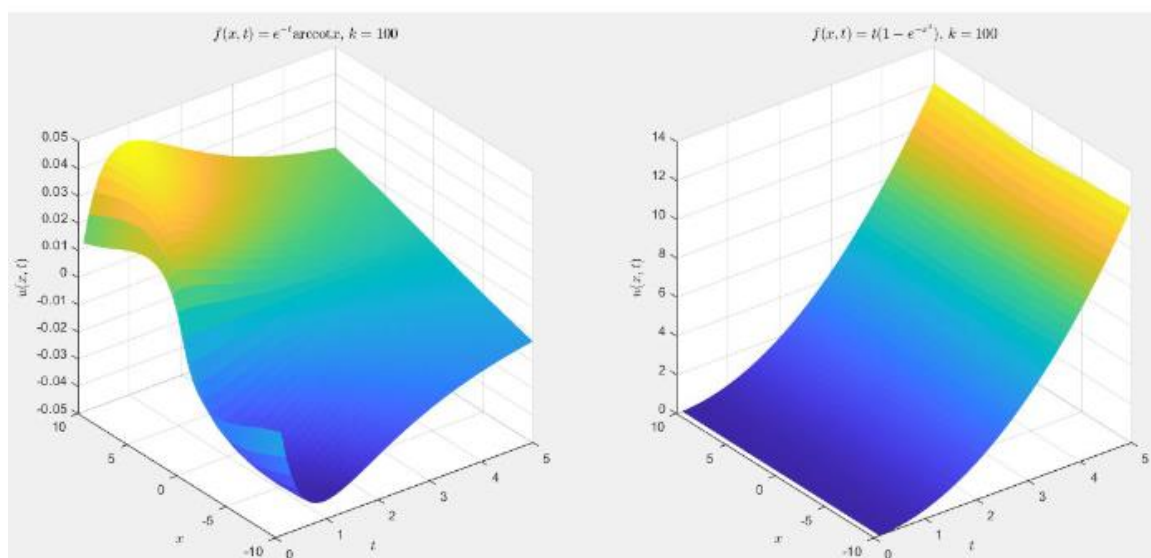


Figura 2. Caso 2: Solução $u(x,t)$ do problema com $k = 100$ e fonte $f(x,t) = e^{-t} \operatorname{arccot} x$ (esquerda) e $f(x,t) = t(1 - e^{-x^2})$ (direita).

Para o terceiro caso, a figura 3 mostra que, inicialmente, a distribuição segue o padrão das condições mas, com o passar do tempo, a difusão suaviza, resultando em uma distribuição mais uniforme.

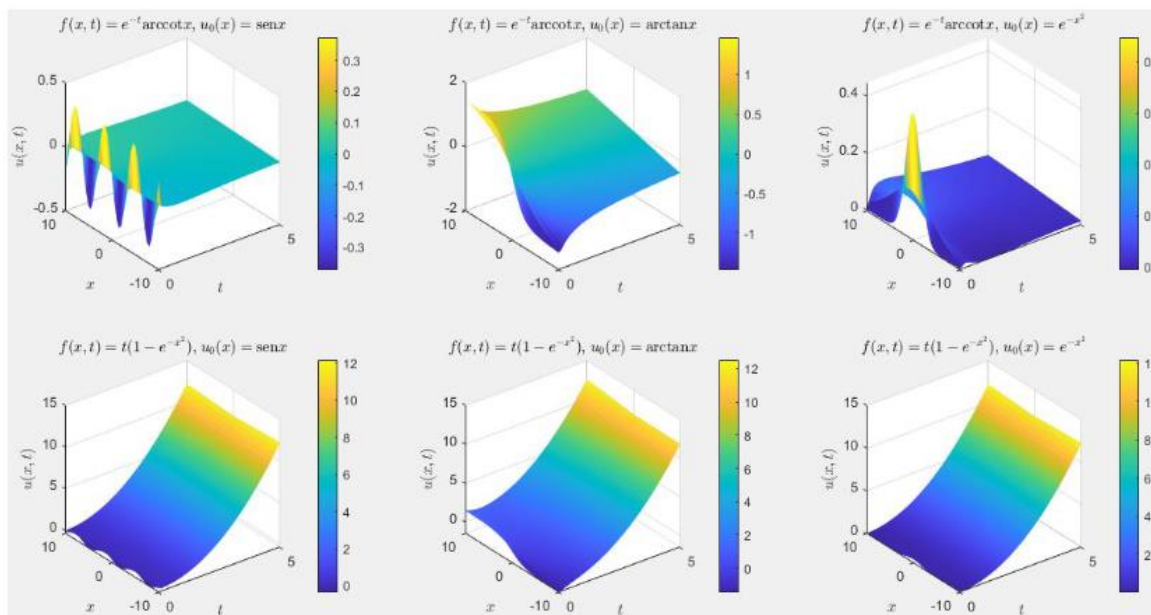


Figura 3. Caso3: Solução $u(x, t)$ do problema com $k = 100$ com fonte e condições iniciais dos casos 1 e 2.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos a resolução analítica de problemas de valores iniciais em domínio infinito para equações de difusão unidimensionais homogêneas e não homogêneas com condições iniciais homogêneas e não homogêneas, a qual é baseada na solução fundamental e os princípios de Duhamel e de superposição. Para ilustrar o comportamento qualitativo das soluções correspondentes, apresentamos exemplos considerando condições iniciais periódica, antissimétrica e simétrica, e termos fonte temporalmente decrescente e espacialmente antissimétrica, e temporalmente crescente e espacialmente simétrica, respectivamente.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARYA, S.P. **Air Pollution Meteorology and Dispersion**. Oxford: University Press, 1998. 320p.
- BARBU, T. **Novel Diffusion-Based Models for Image Restoration and Interpolation**. Cham: Springer, 2019. 134 p.
- COSTA, T.B.; SCHRAMM, M.; PETERSEN, C.Z.; TUMELERO, F. Conductional heat transfer in magmatic intrusions. **Ciência e Natura**, [S.l.], v.45, p.e75134(1-14), 2023.
- FEYNMAN, R.P.; LEIGHTON, R.B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics**. Online. Ed. Pasadena: California Institute of Technology, 2013.
- FOURIER, J.-B.J. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Paris: Didot, 1822.663p.
- HAHN, D.W.; ÖZISIK, M.N. **Heat conduction**. 3a.ed. Hoboken: wiley, 2012.752p.
- HANNA, S.R.; BRIGGS, G.A.; HOSKER, R.P. **Handbook on Atmospheric Diffusion**. Springfield: U.S. Department of Energy, 1982. 110p.
- LAM, K.-Y.; LOU, Y. **Introduction to reaction-Diffusion Equations**. Cham: Springer, 2022. 328p.
- STULL, R.B. **An Introduction to Boundary Layer Meteorology**. Dordrecht: Kluwer, 1988. 680p.