Função Curvatura Média de Superfícies Regradas

JOSÉ FERNANDO UGOSKI SILVEIRA[1]; LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas– jsilveira74@yahoo.com.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

A área de Geometria Diferencial estuda superfícies e suas propriedades e este trabalho foca-se especificamente na curvatura média de superfícies regradas.

A curvatura média, historicamente, foi um problema negligenciado por diversas gerações de geômetras desde o tempo de Gauss (GOMES,1985). Este estudo tem fundamentação teórica em obras clássicas de Geometria Diferencial como a de (CARMO, 2005) e em artigos a respeito da curvatura média das superfícies.

Dada a escassez de cálculos explícitos de curvaturas médias nas literaturas disponíveis, o objetivo deste trabalho é apresentar explicitamente a curvatura média de superfícies regradas em termos da sua curva de estricção quando conveniente.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada foi a consulta livros e artigos relacionados à área (ver [A] e [B]). Esta bibliografia forneceu a base teórica necessária para a compreensão e análise das superfícies regradas.

A fundamentação metodológica incluiu encontros semanais com a professora orientadora, os quais ajudaram a refinar os resultados obtidos. Além disso, utilizou-se o software GEOGEBRA para a criação das figuras utilizadas ao longo do trabalho.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1. Superfícies regradas

Pode-se introduzir o conceito de uma superfície regrada, como a superfície gerada por uma reta movendo-se ao longo de uma curva α.

Abaixo encontra-se a definição de uma superfície regrada de maneira mais precisa.

Definição 3.1.1. *Uma superfície regrada é a superfície parametrizada por* $X: I \times J \subseteq R^2 \to R^3$, I, J *abertos de* R, *definida por:*

$$X(t,v) = \alpha(t) + v \cdot w(t), \qquad \textbf{(1)}$$

onde $\alpha: I \to R^3$ *e* $w: I \to R^3 \setminus \{0,0,0\}$ *são aplicações diferenciáveis para cada* $t \in I$ *e as retas* $L_t = \alpha(t) + v \cdot w(t)$ *são chamadas de geratrizes da superfície* $X(t,v)$ *e* $\alpha(t)$ *é denominada de diretriz da superfície* $X(t,v)$.

Definição 3.1.2. *Seja X uma superfície regrada não-cilíndrica, ou seja,* $w'(t) \neq 0, \forall t \in I$, *de parametrização (1), a curva de estricção desta superfície regrada é dada por:*

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{|w'(t)|^2} \cdot w(t)$$

e os pontos que pertencem a $\beta(t)$ *são chamados de pontos centrais da superfície.*

3.1.1. Exemplos de superfície regrada

Exemplo 1: Superfície com curva α regular.

A seguir, apresenta-se um exemplo não trivial de superfície regrada, utilizando a definição 3.1.1. Neste exemplo, a superfície é parametrizada por $X(t, v)$, conforme descrito na equação abaixo, onde os parâmetros $\mathrm{t}, \mathrm{v} \in \mathrm{R}$:

$$\mathrm{X}(\mathrm{t}, \mathrm{v}) = (5 \sin(\mathrm{t}) \cdot \cos(\mathrm{t}) + \mathrm{v} \cdot \cos(\mathrm{t})\,, 8\cos(\mathrm{t}) + 3 + 2\mathrm{v} \cdot \sin(\mathrm{t})\,, 10\mathrm{t} + 2 + 0.5\mathrm{v} \cdot \mathrm{t})$$

Abaixo é possível visualizar o traço de $X(t, v)$ de dois ângulos diferentes, onde os parâmetros t, v variaram entre $[-10{,}10]$. Observe que a curva preta sobre a superfície, corresponde ao traço da curva diretriz de $\mathrm{X}(\mathrm{t}, \mathrm{v})$.

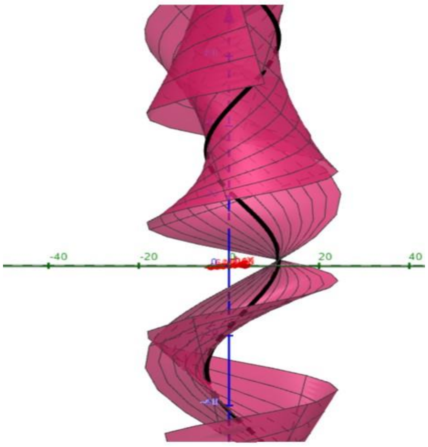

Figura 1: Vista 1 de $X(t, v)$.
Fonte: Autores, 2024.

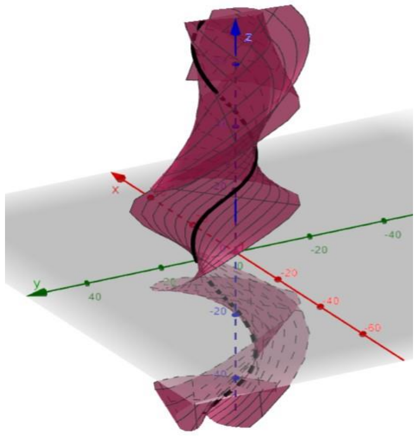

Figura 2: Vista 2 de $X(t, v)$.
Fonte: Autores, 2024.

Exemplo 2: Superfície de Möebius

A faixa de Möebius é uma superfície regrada não orientável, cuja parametrização é dada por:

$$X(t, v) = \left(\sin(t) \cdot \left(4 - v \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right), \cos(t) \cdot \left(4 - v \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right), v \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Abaixo é possível verificar o traço da superfície de Möebius através de dois ângulos diferentes, onde o parâmetro v varia entre $[-5{,}5]$, o parâmetro t varia entre $[0{,}2\pi[$ e a curva preta corresponde ao traço da curva diretriz de $X(t, v)$.

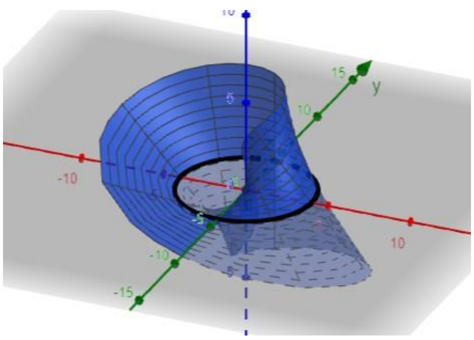

Figura 3: Möebius, vista 1.
Fonte: Autores, 2024.

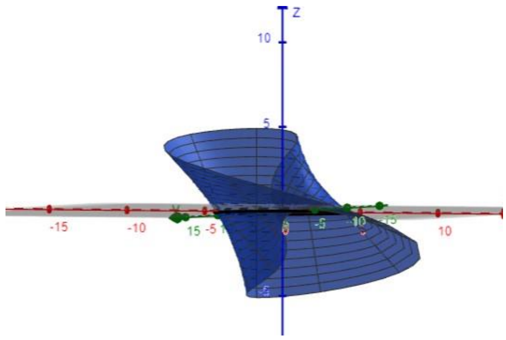

Figura 4: Möebius, vista 2.
Fonte: Autores, 2024.

3.2 Curvatura de Gauss de superfícies regradas

A curvatura de Gauss em superfícies depende apenas da métrica definida na superfície. Em particular quando a superfície é regrada encontra-se o seguinte resultado na literatura:

Teorema 3.2.1. *A curvatura Gaussiana K, de uma superfície regrada não cilíndrica, isto é $w'(t) \neq 0, \forall t \in I$ sempre satisfaz que $K \leq 0$ e K é dado por:*

$$K(t,v) = -\frac{\lambda(t)^2}{(\lambda(t)^2 + v^2)^2}$$

Onde:

$$\lambda(t) = \frac{\langle \beta'(t) \wedge w(t), w'(t) \rangle}{|w'(t)|^2} \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{|w'(t)|^2} \cdot w(t) \qquad (\mathbf{3})$$

As curvas $\lambda(t)$ e $\beta(t)$ são comumente conhecidas como fator de distribuição de $X(t,v)$ e curva de estricção de $X(t,v)$ e a demonstração do teorema 3.2.1 pode ser encontrada no capitulo 3.5 de [A].

3.3 Curvatura média de uma superfície regrada

Proposição 3.3.1. *A curvatura média de uma superfície regrada não cilíndrica parametrizada por $X(t,v) = \beta(t) + v \cdot w(t)$ com $|w(t)| = 1$, onde $\beta(v)$ é a curva de estricção, é dada por:*

$$H(t,v) = \frac{A(t,v) + B(t,v)}{2 \cdot (\lambda(t)^2 + v^2)^{3/2} \cdot |w'(t)|^3}$$

Onde:

$$A(t,v)) = -2 \cdot \lambda(\mathrm{t}) \cdot |\mathrm{w}'(\mathrm{t})|\text{^}2 \cdot \langle \beta'(\mathrm{t}), \mathrm{w}(\mathrm{t}) \rangle + \lambda(\mathrm{t}) \cdot \langle \mathrm{w}'(\mathrm{t}), \beta''(\mathrm{t}) \rangle +$$

$$+ \lambda(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{v} \cdot \langle \mathrm{w}'(\mathrm{t}), \mathrm{w}''(\mathrm{t}) \rangle$$

$$B(t,v) = v \cdot \langle w'(t) \wedge w(t), \beta''(t) \rangle + v\text{^}2 \cdot \langle w'(t) \wedge w(t), w''(t) \rangle,$$

$\lambda(t)$ e $\beta(t)$ são dados respectivamente por (1) e (2).

Ideia da demonstração

A curvatura média de uma superfície S em um ponto p, pode ser calculada utilizando a formula, abaixo:

$$H(p) = \frac{E(p) \cdot g(p) - 2F(p) \cdot f(p) + e(p) \cdot G(p)}{E(p) \cdot G(p) - F^2(p)} \text{ (vide [A], pág 193)}$$

Pela formula acima, percebe-se que para determinar a curvatura média, é necessário calcular os coeficientes da 1º Forma Fundamental, denominados de E, F, G e os coeficientes da 2º Forma Fundamental denominados de e, f, g. Abaixo apresentamos o valor de cada um destes termos:

$$E = \langle X_t, X_t \rangle = |\beta'(t)|^2 + v^2 \cdot |w'(t)|^2$$

$$F = \langle X_t, X_v \rangle = \langle \beta'(t), w(t) \rangle$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1$$

$$e = \langle N, X_{tt} \rangle = \left\langle \frac{\lambda(t) \cdot w'(t) + v \cdot w'(t) \wedge w(t)}{\sqrt{\lambda(t)^2 + v^2} \cdot |w'(t)|}, \beta''(t) + v \cdot w''(t) \right\rangle$$

$$f = \langle N, X_{tv} \rangle = \frac{\lambda(t) \cdot |w'(t)|}{\sqrt{\lambda(t)^2 + v^2}}$$

$$g = \langle N, x_{vv} \rangle = 0$$

Substituindo o cálculo dos coeficientes da 1º Forma fundamental e da 2º Forma fundamental na equação da curvatura média, apresentada acima e com alguma manipulação, conseguiremos determinar que $H(t,v)$ de uma superfície regrada é dada pela formula enunciada na proposição 3.3.1.

Corolário 3.3.1. *Se $X(t,v)$ admite pontos de singularidade, então a curvatura média ao longo dos pontos não centrais das retas geratrizes que interceptam a curva de estricção nesses pontos singulares será dada por:*

$$\mathrm{H}(t,v) = \frac{v \cdot \langle w'(t) \wedge w(t), \beta''(t) \rangle + v^2 \cdot \langle w'(t) \wedge w(t), w''(t) \rangle}{2 \cdot (v^2)^{3/2} \cdot |w'(t)|^3}$$

Proposição 3.3.2. *Seja um cilindro generalizado dado por $X(t,v) = \alpha(t) + v.w(t)$ onde $w'(t) = 0$. Sua curvatura média será dada por:*

$$H(t,v) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge w(t), \alpha''(t) \rangle}{2|\alpha'(t) \wedge w(t)|^3}$$

Vale ressaltar que a demonstração da proposição 3.3.2 é análoga a ideia da demonstração da proposição 3.3.1 apresentada outrora.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho possibilitou um aprofundamento no estudo de superfícies regradas, resultando na elaboração de duas proposições e um corolário, ambos inéditos para os autores, a respeito da curvatura média das superfícies regradas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[A] CARMO, M. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[B] GOMES, J. **A curvatura média das superfícies II.** Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, n.2, p. 20-48, dez. 1985.