UMA RESOLUÇÃO ANALÍTICA ALTERNATIVA DE UM MODELO PARA A CONDUÇÃO DO CALOR NO SOLO

FELIPE M. MENDES BARBOSA[1]; ELISIANE C. DA SILVA[2]; LESLIE D. PÉREZ-FERNÁNDEZ[3]; RUTH S. BRUM[4]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – barbosa.felipe@ufpel.edu.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – elisics@hotmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br*
[4]*Universidade Federal de Pelotas – ruth.silva.brum@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Conforme descrito por Feynman em suas famosas *Lectures on Physics* (FEYNMAN, LEIGHTON, E SANDS, 2013), os fenômenos difusivos desempenham um papel crucial em diversos domínios científicos. A difusão é fundamental para explicar processos como a transferência de calor em materiais sólidos, a condução elétrica em semicondutores, a propagação de partículas em meios heterogêneos e a polarização dielétrica. Assim, a análise dos fenômenos difusivos é essencial para entender diversos processos naturais e industriais. Este estudo propõe uma abordagem alternativa para obter uma expressão fechada da solução exata de um problema de valores iniciais e de contorno para a equação de difusão unidimensional não homogênea com coeficientes constantes em um meio semi-infinito no contexto da condução do calor no solo. Diferentemente do método de separação de variáveis de Fourier utilizado por BRUM (2013), a abordagem adotada baseia-se na solução fundamental, na extensão antissimétrica da condição inicial e nos princípios de Duhamel e de superposição, conforme descrito em LOGAN (2015).

Este trabalho investiga a solução da equação do calor homogênea sujeita a condições não homogêneas, a fim de comparar a eficiência dos métodos de resolução. Os métodos abordados, especialmente a abordagem baseada na solução fundamental, mostraram-se eficazes e precisos. A implementação computacional das soluções, utilizando o *software* Python (PYTHON SOFTWARE FOUNDATION, 2024) e bibliotecas científicas como NumPy, SciPy e Matplotlib, permitiu realizar uma análise detalhada, visualizar e destacar a eficácia da abordagem proposta em relação a outros métodos de resolução para os fenômenos difusivos.

2. METODOLOGIA

A condução do calor no solo é modelada por um PVIC para a equação do calor homogênea com condições não homogêneas, que por sua vez variam apenas em relação ao tempo t e a profundidade z quando assumido algumas suposições, sendo elas que o solo está em condições naturais, a estratificação do solo é maior à medida que se aumenta a profundidade e que não há geração interna de calor (i.e., $f(z,t) = 0$). Segundo BRUM (2013), na superfície onde $z = 0$, a condição de contorno para a equação de difusão do calor é dada por:

$$u(0,t) = u^0(t) = U^0 + \theta_0 sen(\omega t) \qquad (1)$$

A condição inicial é obtida da solução obtida pelo método da separação de variáveis quando $t = 0$ e originalmente é definida como BRUM (2015):

$$\overline{u}(z,t) = U^0 + \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z} sen\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right) \tag{2}$$

onde U^0 é o valor médio da temperatura, θ_0 é a amplitude da variação, e o período ω varia no módulo diário ou no módulo anual. Logo, o problema de valor inicial e contorno a partir das condições estabelecidas será:

$$\begin{aligned} & u_t - ku_{zz} = 0, \quad t > 0, z > 0, \\ & u(0,t) = U^0 + \theta_0 sen(\omega t), \quad t > 0, \\ & u(z,0) = U^0 - \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z} sen\left(\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right), \quad z > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Define-se $v(z,t) = u(z,t) - u^0(t)$ para homogeneizar a condição de contorno, obtendo o seguinte PVIC com fonte não nula:

$$\begin{aligned} & v_t - kv_{zz} = -\omega\theta_0 cos(\omega t), \quad t > 0, z > 0, \\ & v(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ & v(z,0) = v^0(z) = -\theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z} sen\left(\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right), \quad z > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Dada a linearidade da equação de difusão do calor e o princípio de superposição têm-se que $v(z,t) = v^{(1)} + v^{(2)}$, onde $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ são soluções dos problemas auxiliares, em que: o primeiro PVIC auxiliar possui termo fonte não-nulo, como em (4), e condições homogêneas e sua solução para $z,\ t > 0$, é dada pelo princípio de Duhamel e extensão antissimétrica da condição inicial; e o segundo PVIC possui termo fonte e condição de contorno homogêneas e condição inicial não-nula e sua solução para $z,\ t > 0$ é obtida pela extensão antissimétrica da condição inicial do problema de Cauchy correspondente. Como $u(z,t) = v(z,t) + u^0(t)$, então a solução para o problema original é:

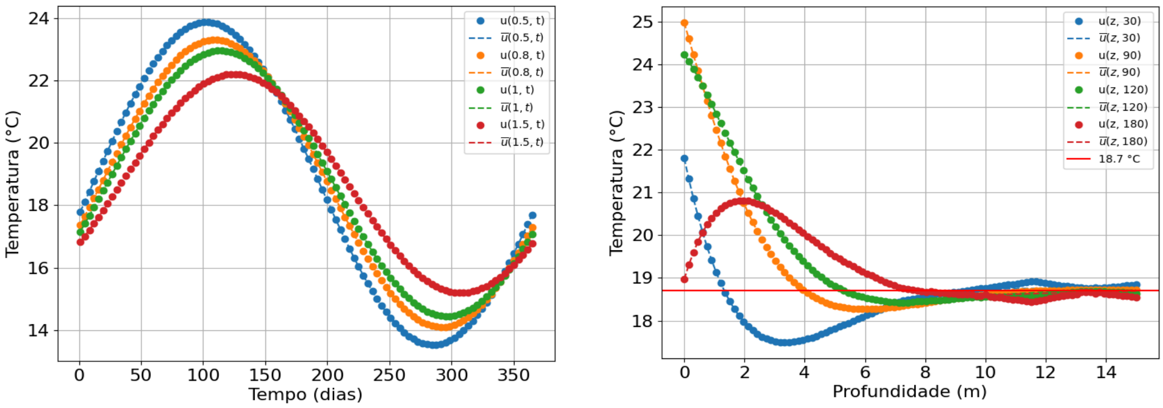
$$\begin{aligned} u(z,t) = & -\omega\theta_0 \int_0^{+\infty}\int_0^{+t} cos(\omega t)[G(z-y,t-\tau) - G(z+y,t-\tau)]d\tau dy \\ & - \int_0^{+\infty} \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z} sen\left(\sqrt{\frac{\omega}{2k}}y\right)[G(z-y,t) - G(z+y,t)]dy \\ & + U^0 + \theta_0 sen(\omega t) \end{aligned} \tag{5}$$

sendo $G(z,t) = (4\pi kt)^{-1/2} e^{-z^2/\sqrt{4kt}}$ a solução fundamental da equação do calor.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Por meio da solução (5), foi implementada a solução analítica com o objetivo de fornecer uma representação detalhada da propagação do calor ao longo do tempo e da profundidade, comparando-a com abordagens alternativas, como o método utilizado por BRUM (2013). Para implementar a solução analítica, foi utilizada a linguagem de programação Python (PYTHON SOFTWARE FOUNDATION, 2024), aproveitando as bibliotecas NumPy, SciPy e Matplotlib para cálculos numéricos, integração e visualização, respectivamente.

Na Fig. 1, é apresentada uma comparação entre as soluções (2) e (5), com o objetivo de analisar a variação da temperatura ao longo do tempo, e sua variação em relação a profundidade. Na implementação foi utilizada amplitude $\theta_0 = 6.28$, período $\omega = 2\pi/365$, e a constante de difusividade $k = 0.057\, mm^2/s$.



(a) Variação temporal (b) Variação espacial

Figura 1 – Comparação entre os perfis temporais e espaciais, para $z \in \{0.5, 0.8, 1.0, 1.5\}$ e $t \in \{30, 90, 120, 180\}$, respectivamente.

Observou-se que a variação da temperatura é coincidente em todos os pontos, com o mesmo comportamento sendo observado para a variação da temperatura em relação à profundidade e à medida que a profundidade aumenta, a temperatura tende ao valor médio de 18 ºC. A solução $u(z, t)$ é representada por marcadores circulares, enquanto a solução $\overline{u}(z, t)$ obtida em BRUM (2013) é representada por curvas contínuas.

A solução também pode ser representada em $\mathbb{R}^3_+$, sendo possível observar sua variação em relação ao tempo e à profundidade simultaneamente, ver Fig. 2.

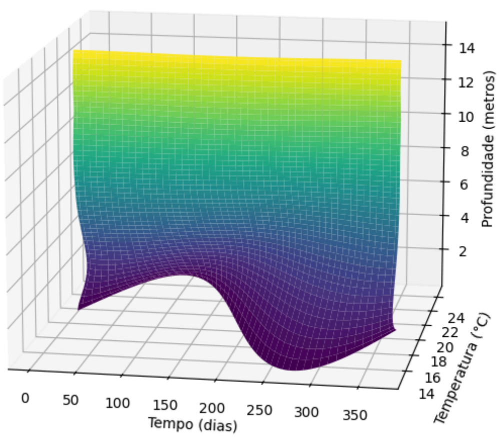


Figura 2 – Variação da temperatura $u(z, t)$.

A análise do erro absoluto indica que $0 \leq e(z,t) \leq 0.197$ °C, ver Fig. 3.

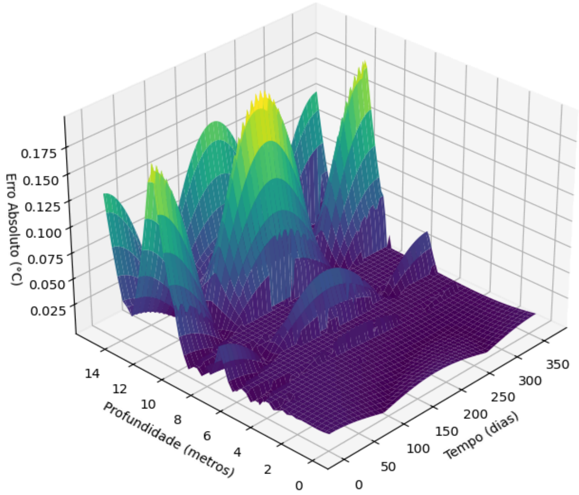


Figura 3 – Variação do erro absoluto $e(z,t)$.

4. CONCLUSÕES

O estudo mostra a eficácia da abordagem utilizando os princípios de superposição e de Duhamel, e a extensão da condição inicial ao redor da condição de contorno homogeneizada, na modelagem da difusão do calor no solo. A solução analítica obtida oferece uma representação detalhada da propagação do calor, permitindo uma compreensão mais profunda do fenômeno estudado. Além disso, a comparação com o método de Fourier, como utilizado por, destaca as vantagens e desvantagens de cada abordagem na resolução de problemas de transferência de calor. Embora ambos os métodos tenham sido eficazes na modelagem da difusão do calor no solo, a escolha entre eles pode depender das características específicas do problema e dos recursos computacionais disponíveis. Utilizar o princípio da superposição, extensão antissimétrica da condição inicial e o princípio de Duhamel, pode ser mais adequado em situações onde as condições de contorno e as propriedades do meio variam com o tempo, enquanto o método de Fourier pode ser preferível em problemas com simetria e condições de contorno bem definidas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Feynman, R.P.; Leighton, R.B.; Sands, M. **The Feynman Lectures on Physics**. California Institute of Technology, California: Pasadena, 2013. Disponível em: https://www.feynmanlectures.caltech.edu. Online ed.

BRUM, R.S. **Modelagem computacional de trocadores de calor solo-ar**. 2013. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande.

LOGAN, J.D. **Applied Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2015.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. **Python**, Versão 3.12.4. 2024. Online. Disponível em: https://www.python.org/.