UMA ANÁLISE SOBRE A EXISTÊNCIA DE FOLHEAÇÃO POR SOLUÇÕES DO PROBLEMA EXTERIOR DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

FILIPE ALMEIDA PEDRA[1]; ARI JOÃO AIOLFI[2]

[1]*Universidade Federal de Santa Maria – filipeapedra@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Santa Maria – ari.aiolfi@ufsm.br*

1. INTRODUÇÃO

Nesse trabalho, consideremos o problema exterior de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$, qual seja,

$$\begin{cases} M(u) = div\frac{\nabla u}{\sqrt{1+||\nabla u||^2}} = 0, \ \ u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}, \qquad (1)$$

onde Ω é um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$, isto é, $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ é relativamente compacto e $f \in C^0$ é dado a priori. Observamos que o gráfico de uma solução u de (1) é uma hipersuperfície mínima contida em $\mathbb{R}^{n+1}$.

O problema (1) tem sido bastante estudado nas últimas décadas, em particular, para o caso $n = 2$. Krust (1989) e Kuwert (1993) mostraram que existe uma folheação por soluções do problema exterior de Dirichlet no espaço entre duas soluções com a mesma aplicação de Gauss no infinito, mas sem mostrar a existência dessas soluções. Sobre dadas circunstâncias no domínio e para dado no bordo $f = 0$, Ripoll (2001) e Ripoll e Tomi (2014) mostraram a existência de uma folheação por soluções do problema (1) de um subconjunto de $\Omega \times \mathbb{R}$ cujo bordo é formado pelos gráficos de duas soluções ilimitadas que são limítrofes de todas as soluções de (1).

O presente trabalho corresponde a um estudo sobre o artigo de A. Aiolfi, D. Bustos e J. Ripoll (2022), que trata do problema (1) para o caso $n \geq 3$. Os autores concluíram que existe uma folheação de um conjunto aberto contido em $\Omega \times \mathbb{R}$ por gráficos das soluções de (1). Além disso, também mostraram algumas propriedades dessas folhas, como sua altura máxima no infinito (a qual pode ser estimada a partir da geometria do domínio) e o seu comportamento no bordo do domínio e no infinito. Este estudo é uma análise detalhada do referido artigo e base de dissertação de mestrado, atualmente em elaboração, a ser apresentada no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (PPGMAT-UFSM).

2. METODOLOGIA

Para tratar dos assuntos referentes ao artigo Aiolfi, Bustos e Ripoll (2022) a principal referência foi o livro de D. Gilbarg e N. Trudinger (2001) sobre a teoria das equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem. A EDP das superfícies mínimas é uma EDP quaselinear elíptica de segunda ordem. Diversas de suas propriedades podem ser extraídas a partir de um estudo das EDP's elípticas lineares de segunda ordem. Foram estudadas propriedades como os princípios do máximo, da comparação e da tangência, além da teoria de

Schauder, a regularidade dessas EDP's, método de Perron e os Espaços de Hölder.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em nossa análise do artigo Aiolfi, Bustos e Ripoll (2022), procuramos detalhar os principais pontos, com o intuito de torná-los mais claros e acessíveis à comunidade acadêmica interessada no assunto. Nesse sentido, reorganizamos o seu principal resultado, como segue:

Teorema 1: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n,, n \geq 3$, um domínio exterior de classe $C^{2,\alpha}$. Dado $s \in (-\infty, \infty)$, existe uma função limitada $u_s \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ que satisfaz (1), com $|u_{-s}| = u_s$ e tal que*

$$\sup_{\bar{\Omega}} ||\nabla u_s|| = \sup_{\partial\Omega} ||\nabla u_s|| = |s|$$

Para a demonstração do Teorema 1 faz-se necessário conhecer as soluções fundamentais de (1), para $f = 0$, em domínios que são o complementar de uma bola em $\mathbb{R}^n$.

Dados $\lambda > 0$ e$p \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$, considere uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro p e raio λ, $B_\lambda(p)$. A função radial dada por:

$$v_\lambda = \lambda \int_0^{r/\lambda} \frac{dt}{\sqrt{t^{2(n-1)} - 1}}, \qquad r = \big||x - p|\big|, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash B_\lambda(p)$$

é solução de (1) em $\mathbb{R}^n \backslash B_\lambda(p)$ e seu gráfico corresponde a meio catenoide. A partir de translações verticais, isometrias e homotetias é possível obter uma família de soluções radiais de (1) em $\mathbb{R}^n \backslash B_\lambda(p)$ com módulo do gradiente no bordo variando de 0 a infinito. Além disso, nota-se que em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, essas soluções fundamentais têm altura limitada, o que não acontece para o caso de $\mathbb{R}^2$. Chamamos a altura de v_λ relativas à dimensão n de $h(n, \lambda)$.

O Teorema 1 é provado então utilizando-se das soluções fundamentais definidas no exterior de uma bola contendo o bordo de Ω, do princípio da tangência e da teoria das EDP's elípticas.

O gráfico de u_s obtida no Teorema (1) é por construção de declividade limitada, pois em nenhum de seus pontos o plano tangente possui um vetor vertical. Portanto, por Schoen (1984), as soluções construídas no Teorema 1 são regulares no infinito, ou seja, tem uma expansão duas vezes diferenciável dada por

$$u_s(x) = c_s + a_s||x||^{2-n} + \sum_{j=1}^{n} c_{s,j}\, x_j \big||x|\big|^{-n} + O(||x||^{-n})$$

Utilizando-se dessa informação, mostra-se a seguinte propriedade relativa às u_s.

Corolário 1: *Relativamente às soluções u_sa que se refere o Teorema 1, existe o limite $u_s(\infty) := \lim_{||x|| \to \infty} u_s(x)$. Além disso $\lim_{||x|| \to \infty} ||\nabla u_s(x)|| = 0$*

Podemos também verificar que essas soluções têm altura limitada no infinito, utilizando-se para tal do princípio da tangência e fazendo-se translações verticais de u_s.

Corolário 2: *Seja ϱ o raio da menor bola B_ϱ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega \subset \overline{B_\varrho}$ e seja $h(n,\varrho)$ a altura de da solução fundamental de dimensão n no exterior da bola B_ϱ, tem-se:*

$$|u_s| \leq h(n,\varrho)$$

Utilizando o método de Perron e levando-se em conta uma hipótese de que o exterior do domínio satisfaz a condição da esfera interior para algum raio $\rho > 0$, podemos mostrar que para qualquer valor c entre 0 e $h(n,\rho)$, existe uma solução definida no Teorema 1 tal que seu limite quando $||x|| \to \infty$ é o próprio c.

Corolário 3: *Suponha $\Lambda \coloneqq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ satisfazendo a condição da esfera interior com raio máximo ρ. Então, dado $c \in [0, h(n,\rho)]$, existe $u_c \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solução de (1) tal que $lim_{||x|| \to \infty} u_c(x) = c$. Além disso, pondo-se $s_c = sup_{\partial\Omega} ||\nabla u_c||$, tem-se $u_{s_c} = u_c$, onde u_{s_c} é dado pelo Teorema 1.*

O artigo também trata do caso $s = \infty$, mas não foi possível mostrar que $u_\infty \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, e sim que seu gráfico está contido em uma variedade N de classe $C^{1,1}$, contida em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ tal que $\partial N = \partial\Omega$. Observamos que as funções $s \mapsto u_s(\infty)$ e $s \mapsto f_x(s)$ para um $x \in \Omega$ fixado são contínuas, limitadas e estritamente contínuas.

4. CONCLUSÕES

A partir desses resultados, podemos chegar à seguinte conclusão:

Corolário 4: *Os gráficos das soluções dados pelo Teorema 1 folheam o seguinte conjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$:*

$$O \coloneqq \{(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R} : u_{-\infty} < z < u_\infty\}$$

Conclui-se, portanto, que existe uma folheação do conjunto descrito acima, conforme descrita no artigo Aiolfi, Bustos e Ripoll (2022), em que cada folha é um gráfico de uma solução do problema exterior de Dirichlet (1) com $f = 0$.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIOLFI, A.; BUSTOS D.; RIPOLL J. On the existence of foliations by solutions to the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation, **Proceedings of the American Mathematical Society**, v.150 n. 7, p. 3063-3073, 2022

GILBARG, D.; TRUDINGER N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin: Springer, 2001

KRUST, R. Remarques sur le problem extérieur de Plateau, **Duke Mathematical Journal**, v. 59, n. 1, p. 161-173, 1989
KUWERT, E. On solutions of the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation, **Annales de l'Institut Henri Poincaré C Analyse non linéaire**, v. 10, n. 4, p. 445-451, 1993

RIPOLL, J. Some characterization, uniqueness and existence results for Euclidean graphs of constant mean curvature with planar boundary, **Pacific journal of mathematics**. Berkeley. v. 198, n. 1, p. 175-196. 200

RIPOLL, J.; TOMI, F. On solutions to the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation with catenoidal ends, **Advances in Calculus of Variations** v.7 n. 2, p.205-226, 2014

SCHOEN, R. M. Uniqueness, symmetry, and embeddness of minimal surfaces, **Journal of Differential Geometry**, v. 18, n. 4, p. 791-809, 1984