QL-IMPLICAÇÕES VIA FUNÇÕES GENERAL OVERLAP E GROUPING

ALESSANDRA ROSA GALVÃO[1]; CECILIA SILVA DA COSTA BOTELHO[2]; ADENAUER YAMIN[3]; RENATA HAX SANDER REISER[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas, Bacharelado Ciência da Computação–argalvao@inf.ufpel.edu.br
[2]Universidade Federal de Pelotas, Bacharelado Ciência da Computação–cscbotelho@inf.ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal de Pelotas – adenauer@inf.ufpel.edu.br, reiser@inf.ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Os atuais problemas com abordagem lógica multivalorada são amplamente aplicados via sistemas computacionais. A lógica fuzzy vem se consolidando como alternativa para tratamento da incerteza desde a modelagem, promovendo explicabilidade dos resultados e interação de algoritmos de inteligência artificial, quando da tomada de decisão baseada em múltiplos critérios com a análise de especialistas. Neste contexto, sistemas de inferência são relevantes componentes, justificando o estudo de possíveis extensões baseadas em distintas classes de implicações e agregadores fuzzy que constituem um desafio de pesquisa, promovendo abordagens flexíveis para aplicações reais. (BUSTINCE et al, 2012)

A flexibilização das propriedades destes conectivos potencializa a modelagem da inferência fuzzy, focando neste trabalho na classe de implicações quânticas, as QL- e D-implicações, as quais são explicitamente definidas por negações fortes, normas e co-normas triangulares. Buscamos generalizações deste operadores, flexibilizando propriedades como associatividade e elemento neutro. E assim, exploramos propriedades analíticas das funções overlap e grouping para introduzir novos métodos construtivos e generalizações para QL- e D-implicações (REISER et at, 2010).

2. METODOLOGIA

Consideramos na primeira etapa, a revisão de artigos técnicos publicados na área, priorizando a formalização de sistemas baseados na abordagem lógica da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Focamos nas propriedades que definem os conectivos fuzzy, como as negações fuzzy (N). No estudo de agregadores fuzzy, as funções de overlap (O) e grouping (G), foram analisadas quanto às condições providas por propriedades analíticas para geração de novas implicações. Aplicações de projeções, geradores, reduções e automorfismos sobre classes de agregadores exploram construções duais, as quais serão apresentadas nas definições a seguir.

Agregadores fuzzy são funções monotônicas no intervalo [0,1] e verificam as condições de borda (GRABISCH et al, 2011). Veja propriedades extra na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades adicionais para agregações fuzzy

Expressão	Propriedade
$[A1]$ $A(x_1,\ldots,x_n) \leq A(x'_1,\ldots,x'_n)$ se $x_i \leq x'_i, \forall x_i, x'_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$.	Monotonicidade
$[A2]$ Seja $N_n = \{1,2,\ldots,n\}$ e $\sigma : N_n \to N_n$ uma σ-permutação, então: $A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$	Simetria
$[A3]$ $\exists e \in [0,1]$: $A(x_1,\ldots,x_{i-1},e,x_{i+1},\ldots,x_n) = A(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$	e-Neutralidade
$[A4]$ Seja $\{x_{1i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, então: $\lim_{n\to\infty} A(x_{1i}, x_2, \ldots, x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_{1i}, x_2, \ldots x_n), \forall x_i \in [0,1], i \in \mathbb{N}_n$	Continuidade

Em (BEDREGAL et al,2013), uma função general-overlap O: $[0, 1]^n \to [0, 1]$ satisfaz A1, A2, A3 e as duas seguintes condições:

(i) Se $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ então $O(x_1,\ldots,x_n)=0$; (ii) Se $\prod_{i=1}^{n} x_i=1$ então $O(x_1,\ldots,x_n)=1$.
E, uma função general-grouping G: $[0, 1]^n \to [0, 1]$ satisfaz A1, A2, A4 e as condições:

(i) Se $x_i=0$, $\forall_i \in N_n$ então $G(x_1,\ldots,x_n)=0$; (ii) Se $\exists_i \in N_n$ tal que $x_i=1$ então $G(x_1,\ldots,x_n)=1$.

Na Tabela 2, ilustrações de agregadores na abordagem bi-dimensional.

Tabela 2. Funções general-overlap e general-grouping bi-variantes.

Funções Grouping	Funções Overlaping
$G_2^V(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-(1-x)^2(1-y)^2), \text{ se } x,y \in [0,\frac{1}{2}]; \\ \max\{x,y\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$	$O_2^V(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+(2x-1)^2(2y-1)^2, \text{ se } x,y \in [0,0.5[\\ \min\{x,y\}, \text{caso contrário.} \end{cases}$
$G_{DB}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{2-(x+y)} & \text{se } x+y \neq 2; \\ 0, & \text{se } x+y=2. \end{cases}$	$O_{DB}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$
$G_{m\frac{1}{2}}(x,y) = 1 - \min\{\sqrt{1-x}, \sqrt{1-y}\}$	$O_{m\frac{1}{2}}(x,y) = \min\{\sqrt{x}, \sqrt{y}\}$

No estudo de implicações fuzzy, tem-se as propriedades da Tabela 3.

Tabela 3. Propriedades de implicações fuzzy.

Expressão	Propriedade	Expressão	Propriedade
$x \leq y \Rightarrow I(x,y) \geq I(z,y)$	FPA	$x \leq y \Rightarrow I(x,y) = 1$	LOP
$y \leq z \Rightarrow I(x,y) \leq I(x,z)$	SPI	$I(x,y) = 1 \Rightarrow x \leq y$	ROP
$I(0,0) = 1$	BC1	$I(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ e $y = 0$.	LF
$I(1,1) = 1$	BC2	$I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 1$	LT
$I(1,0) = 0$	BC3	N: $I(x,y) = I(N(y), N(x))$	CP
$I(1,y) = y$	NP	N: $I(N(x),y) = I(N(y),x)$	LCP
$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$	EP	N: $I(x,N(y)) = I(y,N(x))$	RCP
$I(x,x) = 1$	IP	$I(0,y) = 1$	LBC
$I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$	OP	$I(x,1) = 1$.	RBC

A função I : $[0,1]^2 \to [0,1]$ é implicação fuzzy se verifica as propriedades FPA, SPI, BC1, BC2, e BC3.

Sejam uma t-(co)norma S: $[0, 1]^2 \to [0,1]$, uma t-norma T: $[0,1]^2 \to [0,1]$ e uma negação fuzzy forte N : $[0,1] \to [0,1]$. Por [Baczynski and Jayaram 2010], uma QL-implicação $I_{S,N,T}$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ e uma D-implicação $I_{S,T,N}$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ são implicações explicitamente representadas pelas respectivas composições:

$$I_{S,N,T}(x, y) = S(N(x),T(x, y)), \ \forall x, y, z \in [0, 1] \text{ e} \quad (1)$$

$$I_{S,T,N}(x, y) = S(T(N(x),N(y)), y), \ \forall x, y, z \in [0, 1], \quad (2)$$

Ao considerar (co)normas triangulares (t-(co)normas) precisamos garantir associatividade e elemento neutro para modelar regras de inferência que usam uniões e intersecções fuzzy. Aplicar overlap e grouping flexibiliza essas construções.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicamos a negação topo, NT:[0,1]→[0,1], onde NT:(1)=0 e NT:(x)=1, ∀x ∈ [0,1[e apresentamos as subclasses de QL- e D-implicações geradas de ternas (G,N_T,O) e (G,O,N_T), generalizando as implicações dadas pelas Eq(1) e Eq(2).

Proposição 1. Se $I_{G,N_T,O}$ satisfaz (RBC) e o GOF O satisfaz (O6), então o par (G, N) satisfaz G(N(x),x) = 1 ∀x ∈ [0,1]. E ainda, sejam O um GOF, and G um GGF, então tem-se que:

(i) Se uma função construída a partir da tupla (G, N, O), onde G satisfaz (Gn3) e O satisfaz (On3), é uma função de implicação fuzzy então N = N_T.

(ii) Se N = N_T então uma função construída a partir da tupla (G, N,O) é uma função de implicação fuzzy.

Proposição 2. Sejam um GOF O: [0, 1]² → [0, 1], um GGF G : [0, 1]² → [0, 1], com nO e nG como NE de O e G, respectivamente. Seja N_T:[0,1]→[0,1] a maior negação fuzzy. Assim, valem as seguintes afirmações:

(i) Se nO = 1, então a função de implicação QL construída a partir da tupla (G, N_T,O) é definida por:

$$I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{se } x<1 \text{ ou } y=1\\ \mathcal{G}(0,y), & \text{se } x=1 \text{ e } y<1.\end{cases}$$

(ii) Se nG = 0, então a QL-implicação construída a partir da tupla (G, N_T,O) é definida por:

$$I_{\mathcal{G},N_\top,\mathcal{O}}(x,y)=\begin{cases}\mathcal{O}(1,y), & \text{se } x=1 \text{ e } y<1\\ 1, & \text{se } x<1 \text{ ou } y=1.\end{cases}$$

No próximo teorema, tem-se as propriedades de QL-implicações.

Teorema 1. Seja $I_{G,N_T,O}$: [0, 1]^n → [0, 1] uma QL-implicação construída a partir da tupla (G, N_T, O). Então:

(i) $I_{G,N_T,O}$ satisfaz LBC, LOP, RCP e EP;

(ii) Se nO = 1 e nG = 0 são NE de O e G, respectivamente, então $I_{G,N_T,O}$ satisfaz NP;

(iii) $NI_{G,N_T,O}$ = N_T;

(iv) Se G e O satisfazem (Gn2) e (On2), respectivamente, então, $I_{G,N_T,O}$ satisfaz LF;

(v) $I_{G,N_T,O}$ satisfaz FP;

(vi) Se nO = 1 e nG = 0 são NE de O e G, respectivamente, então $I_{G,N_T,O}$ não satisfaz LCP para N_T.

(vii) $I_{G,N_T,O}$ não satisfaz ROP, LT e OP.

A partir dos resultados das Proposições 1 e 2 e Teorema 1, considerando a função negação N_T e aplicando as funções da Tabela 2, geramos Ql- e D-implicações fuzzy, indicadas por $I_{G,N,O}$ e $I_{G,O,N}$ e explicitamente definidas na Tabela 4.

Tabela 4. Implicações via general-overlap e general-grouping bi-variantes.

Funções $I_{G,N_T,O}$	Funções I_{G,O,N_T}
$I_{G_2^V,N_T,O_2^V}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+(2y-1)^2\right), \text{se } x=1 \text{ e } y\geq 0.5;\\ \frac{1}{2}\left(1-(1-y)^2\right), \text{se } x=1 \text{ e } y<0.5;\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$	$I_{G_2^V,O_2^V,N_T}(x,y)=\begin{cases}y, \text{se } x=1 \text{e } y\geq 0.5;\\ \frac{1}{2}\left(1-(1-y)^2\right), \text{se } x=1\text{e } y<0.5;\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$
$I_{G_{DB},N_T,O_{DB}}(x,y)=\begin{cases}y, \text{se } x=1;\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$	$I_{G_{DB},O_{DB},N_T}(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{2-y}, \text{se } x=1;\\ 1, \text{caso contrário.}\end{cases}$
$I_{Gm_{\frac{1}{2}},N_T,Om_{\frac{1}{2}}}(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{1-\sqrt{y}}, \text{se } x=1;\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$	$I_{Gm_{\frac{1}{2}},Om_{\frac{1}{2}},N_T}(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{1-y}, \text{se } x=1;\\ 1, \text{ caso contrário.}\end{cases}$

4. CONCLUSÕES

A proposta recupera nas características das funções general-overlap e general-grouping bi-variantes um modelo construtivo para a geração de QL- e D-implicações fuzzy, estendendo os resultados da literatura (DIMURO et al 2019)

Estes operadores estão sendo considerados para análise de informações junto ao Int-FLBBC (SCHENEIDER et al 2020), o componente em desenvolvimento no LUPS/UFPEL, modelando incertezas e imprecisões via lógica fuzzy valorada intervalarmente, para gerenciamento eficiente de recursos quando da migração de máquinas virtuais em ambientes típicos da computação em nuvem. A abordagem multivalorada intervalar tem sido amplamente estudada (CAO et al, 2021).

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACZYNSKI, M.; JAYARAM, B. (2010), QL-implications: Some properties and intersections. **Fuzzy Sets Systems**, 161:158–188.

BEDREGAL, B.; DIMURO, G. BUSTINCE, H.; BARRANECHEA, E. (2013). New results on overlap and grouping functions. **Information Sciences**, 249:148–170.

BUSTINCE, H., PAGOLA, M., MESIARe, R., HULLERMEIER, E., and HERRERA, F. (2012). Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, 20(3):405–415.

DIMURO, G., SANTOS, H., BEDREGAL, B., BORGES, E., PALMEIRA, E., FERNANDES, J., and BUSTINCE, H. (2019). On D-implications derived by grouping functions. In 2019 **IEEE Intl Conf. on Fuzzy Systems**, LA, USA, June 23-26, 2019, pages 1–6. IEEE.

GRABISH, M., MARICHAL J., MESIAR, R., and PAP, E. (2011). Aggregation functions: Construction methods, conjunctive, disjunctive and mixed classes. **Inf. Sci.**, 181(1):23–43.

SCHNEIDER, G. MOURA, B., YAMIN, A. and REISER, R. Int-FLBCC: Model for load balancing in cloud computing using Fuzzy Logic Type-2 and admissible orders. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, v. 27, n. 3, p. 102–117, 2020.
CAO, M. and HU, B., “On interval RO- and (G,O,N)-implications de-rived from interval overlap and grouping functions,” Int. **J. Approximate Reasoning**, vol. 128, pp. 102–128, 2021.

REISER, R., BEDREGAL, B., SANTIAGO, R., and DIMURO, G., “Analyzing the relationship between interval-valued D-implications and interval-valued QL-implications,” **Apl. Comput**, vol. 11, pp. 89–100, 03 2010.