SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM MODELO BIDIMENSIONAL DE DISPERSÃO DE POLUENTES EM ATERROS SANITÁRIOS

JOSIANE KONRADT[1]; IGOR DA CUNHA FURTADO[2]; DANIELA BUSKE[3]; RÉGIS SPEROTTO DE QUADROS[4]; GUILHERME JAHNECKE WEYMAR[5]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – josianekonradt@gmail.com*
[2]*Instituto Federal Sul-rio-grandense – igorjara@gmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com*
[4]*Universidade Federal de Pelotas – quadros99@gmail.com*
[5]*Universidade Federal de Pelotas – guilhermejahnecke@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

A geração de resíduos sólidos urbanos (RSU) têm aumentado de forma significativa nos últimos anos. Dados da Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais – ABRELPE (2021), mostram que durante a pandemia de COVID-19, principalmente nos anos de 2020 e 2021, ocorreu um acréscimo na geração de RSU no Brasil. A principal razão é devido a migração das atividades sociais, de trabalho e educação para as residências, alterando a dinâmica de estilo de vida, onde o aumento da utilização do *delivery* e de materiais não reutilizásseis foram quase que totalmente transferidas para as residências.

Segundo a ABRELPE (2021), anualmente são coletados mais de 76 toneladas de RSU e a produção anual é de $359{,}3$ kg por habitante. A maior parte destes RSU são destinados a aterros sanitários, sendo está a forma de destinação adequada. Entretanto, parte significativa ainda é enviada a aterros controlados e lixões, sendo estas formas incorretas de dispor o RSU, o que pode acarretar em consequências negativas para o meio ambiente e os seres vivos.

Desta forma, torna-se necessário o estudo de métodos que prevejam como será a dispersão de poluentes, de modo que possam haver ações que possam controlar a contaminação do solo e do lençol freático, com base nas projeções dos métodos. No presente trabalho, será desenvolvida a solução de um modelo matemático para simulação da dispersão de poluentes em aterros sanitários. Para resolução do modelo bidimensional transiente de transporte de massa num meio poroso saturado, utilizou-se o método *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) com o objetivo de obter a solução da forma analítica do problema, sendo este trabalho uma continuação de KONRADT *et al*. (2021), onde foi apresentado o modelo unidimensional.

2. METODOLOGIA

A seguinte equação, escrita na forma adimensional, descreve o transporte de poluentes no meio poroso saturado, podendo ser encontrada no trabalho de ALBUQUERQUE (2018):

$$R\frac{\partial C}{\partial t} = L^*\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - Pe\frac{\partial C}{\partial y}, \tag{1}$$

onde R representa o fator de retardamento do solo, C é a concentração do contaminante na fase líquida, t equivale ao tempo, L^* é a relação entre as dimensões em y e x do problema $\left(L^* = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2\right)$, x representa a direção X, y representa a direção

Y e Pe é o Número de Péclet. A equação (1) está sujeita à condição de interface que corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de chorume em uma célula de RSU. A condição inicial do problema é dada por $C(x,y,0) = C_0$, onde C_0 é a concentração inicial do contaminante na célula de armazenamento de RSU.

As condições de contorno na forma adimensional e na direção x, são dadas por $\frac{\partial C}{\partial x}(0,y,t) = 0$ e $\frac{\partial C}{\partial x}(1,y,t) = 0$, onde são utilizadas condições de fluxo nulo nas fronteiras do domínio em x. As condições de contorno na direção y, são dadas por $C(x,0,t) = 1$, a qual representa a concentração constante na célula de RSU que fica entre o aterro e o solo, além de $\frac{\partial C}{\partial y}(x,1,t) + BiC(x,1,t) = 0$, onde Bi é o número de Biot, e a condição representa o fluxo convectivo situada na parte de contato entre o solo e o lençol freático.

Aplicando o Método de Superposição (Özisik, 1993):

$$C(x,y,t) = C^*(x,y,t) + C_F(y), \tag{2}$$

onde C^* é uma função auxiliar que leva consigo a condição de fronteira homogênea e C_F é a solução para o problema no estado estacionário. Logo, substituindo a equação (2) na equação (1), temos:

$$R\frac{\partial C^*}{\partial t} = L^*\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^2} + \frac{d^2 C_F}{dy^2} - Pe\left(\frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{dC_F}{dy}\right). \tag{3}$$

A partir da equação (3), temos duas equações diferencias, uma ordinária (EDO) e outra parcial (EDP). Dessa forma, a EDO e as condições de contorno são dadas pelas seguintes equações:

$$\frac{d^2 C_F}{dy^2} - Pe\frac{dC_F}{dy} = 0, \qquad C_F(0) = 1, \qquad \frac{dC_F(1)}{dy} + BiC_F(1) = 0. \tag{4}$$

A equação (4) possui uma solução geral já conhecida e após aplicar as condições de contorno obtemos:

$$C_F(y) = \frac{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bie^{Pey}}{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi}, \tag{5}$$

assim, a equação (5) é a solução para a EDO (4).

A EDP obtida da equação (3), e as suas condições de contorno respectivamente em x e y, além da condição inicial são dadas por:

$$\begin{cases} R\dfrac{\partial C^*}{\partial t} = L^*\dfrac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 C^*}{\partial y^2} - Pe\dfrac{\partial C^*}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial C^*}{\partial x}(0,y,t) = 0, \qquad \dfrac{\partial C^*}{\partial x}(1,y,t) = 0, \\ C^*(x,0,t) = 0, \qquad \dfrac{\partial C^*}{\partial y}(x,1,t) + BiC^*(x,1,t) = 0, \\ C^*(x,y,0) = C_0 - C_F(y). \end{cases} \tag{6}$$

Para obter a solução $C^*(x,y,t)$ da equação descrita acima, utiliza-se o método GILTT. Para isso, primeiramente, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{L^*}\varphi = 0, \qquad \frac{d\varphi(0)}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi(1)}{dx} = 0, \tag{7}$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções

$$\varphi_n(x) = cos\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{L^*}}x\right), \tag{8}$$

onde os autovalores são obtidos da expressão $\lambda_n = n\pi\sqrt{L^*}, n = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

A seguir, a solução da EDP (6) é expandida como uma série em termos das autofunções:

$$C^*(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\bar{C}_n(y,t), \tag{9}$$

onde $\bar{C}_n(t)$ são termos a serem determinados e N é o índice no qual a soma converge.

Substitui-se a expansão (9) na equação (6) e aplica-se o operador integral $\int_0^1(.)\varphi_m(x)dx$ em ambos lados da equação, utilizando o fato que $\varphi_n''(x) = -\lambda_n^2\varphi_n(x)$, obtemos:

$$R\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial\bar{C}_n(y,t)}{\partial t}\int_0^1\varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = -L^*\lambda_n^2\sum_{n=1}^{N}\bar{C}_n(y,t)\int_0^1\varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial^2\bar{C}_n(y,t)}{\partial y^2}\int_0^1\varphi_n(x)\varphi_m(x)\bar{C}_n(t)dx - Pe\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial\bar{C}_n(y,t)}{\partial y}\int_0^1\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx. \tag{10}$$

Portanto, simplificando a equação (10) obtemos:

$$R\frac{\partial\bar{C}_n(y,t)}{\partial t} + L^*\lambda_n^2\bar{C}_n(y,t) - \frac{\partial^2\bar{C}_n(y,t)}{\partial y^2} + Pe\frac{\partial\bar{C}_n(y,t)}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Para a resolução da EDP (11), utiliza-se os mesmos passos acima, construindo um novo problema de Sturm-Liouville, agora na variável y, que possui como solução as autofunções

$$\psi_n(y) = sen(\beta_n y), \tag{12}$$

aplicando as condições de contorno, obtemos os autovalores associados a cada autofunção. Eles devem satisfazer a seguinte equação transcendental $\beta_n ctg(\beta_n) = -Bi$, onde os autovalores β_n são as raízes da equação (12) e foram calculados pelo método de Newton-Raphson.

A seguir, a solução da EDP (11) é expandida como uma série em torno das autofunções:

$$\bar{C}(y,t) = \sum_{n=1}^{N}\psi_n(y)\tilde{C}_n(t). \tag{13}$$

Substituindo a solução (13) na equação (11) e aplicando o operador integral $\int_0^1(.)\psi_m(y)dy$ em ambos lados da equação, notando que $\psi_n''(y) = -\beta_n^2\psi_n(y)$, obtemos:

$$R\sum_{n=1}^{N}\tilde{C}_n'(t)\int_0^1\psi_n(y)\psi_m(y)dy + L^*\lambda_n^2\sum_{n=1}^{N}\tilde{C}_n(t)\int_0^1\psi_n(y)\psi_m(y)dy +$$
$$+\beta_n^2\sum_{n=1}^{N}\tilde{C}_n(t)\int_0^1\psi_n(y)\psi_m(y)dy + Pe\sum_{n=1}^{N}\tilde{C}_n(t)\int_0^1\psi_n'(y)\psi_m(y)dy = 0. \tag{14}$$

Com isso, reescrevemos a equação (14) na forma matricial:

$$B\cdot Y'(t) + E\cdot Y(t) = 0. \tag{15}$$

Definindo: $Y(t) = \{\tilde{C}_n(t)\}$; $B = \{b_{n,m}\}$, onde $b_{m,n} = R\int_0^1\psi_n\psi_m(y)dy$; $E = \{e_{n,m}\}$, onde, $e_{m,n} = Pe\int_0^1\psi_n'\psi_m(y)dy + (L^*\lambda_n^2 + \beta_n^2)\int_0^1\psi_n(y)\psi_m(y)dy$, ou ainda, sendo $F = -B^{-1}\cdot E$, reescreve-se a equação (15) da forma:

$$Y'(t) + F\cdot Y(t) = 0. \tag{16}$$

Em relação a condição inicial, temos que:

$$C^*(y,0) = C_0 - C_F(y). \tag{17}$$

Aplicando-se a expansão (9) e o operador integral $\int_0^1 (\,.\,)\psi_m(y)dy$ na condição inicial (17), obtemos:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_0^1 \psi_m(y)\,\psi_n(y)\bar{C}_n(0)dy = \int_0^1 (C_0 - C_F(y))\,\psi_m(y)dy, \tag{18}$$

escrevendo (18) na forma matricial: $Y(0) = R \cdot A^{-1} \cdot H,$ onde $H = \int_0^1 (C_0 - C_F(y))\psi_m(y)dy$ e desta forma a condição inicial está bem definida.

A EDO matricial (16) é resolvida pela transformada de Laplace. Assumindo que a matriz F seja diagonalizável, temos que $F = X \cdot D \cdot X^{-1}$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de F, X é a matriz cujas colunas constituem os autovetores linearmente independentes de F e X^{-1} é sua inversa. Logo a solução da equação (16) é dada por:

$$Y(t) = X \cdot \mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot I + D)^{-1}, s \to t\} \cdot X^{-1} \cdot Y(0). \tag{19}$$

Utilizando as propriedades da transforma inversa de Laplace, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot I + D)^{-1}, s \to t\} = \begin{pmatrix} e^{-d_0 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-d_N t} \end{pmatrix} = G(t). \tag{20}$$

Portanto, com a matriz $G(t)$ definida em (20), conclui-se que a solução da EDO matricial (16) é: $Y(t) = X \cdot G(t) \cdot X^{-1} \cdot Y(0)$. Logo, a solução do modelo bidimensional da dispersão de poluentes em meios porosos é dada por:

$$C^*(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 \varphi_n(y) \left[\sum_{n=1}^{N} \psi_n(y)\tilde{C}_n(t) \right] dy, \tag{21}$$

onde $\varphi_n(y)$, $\psi_n(y)$ e $\tilde{C}_n(t)$ são funções conhecidas, respectivamente pelas equações (8), (12) e (13).

3. CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi encontrada a solução analítica para o problema bidimensional de dispersão de poluentes em aterros sanitários pelo método GILTT. Como próximos passos, pretendemos realizar simulações computacionais e comparar os resultados obtidos pelo modelo com os dados disponíveis na literatura.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRELPE – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais. **Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2021**. São Paulo, 2021. Disponível em: https://abrelpe.org.br/panorama-2021/. Acesso em: 10 ago. 2022.

ALBUQUERQUE, F. A. **Estudo da propagação de contaminantes em aterros sanitários via GITT**. 2018. Tese (Doutorado em Ciências Ambientais) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba.

KONRADT, J.; ALMEIDA, T. F.; FURTADO, I. C.; WEYMAR, G. J.; BUSKE, D.; QUADROS, R. S.. Um modelo matemático para estudo de propagação de contaminantes em aterros sanitários. In: XXX CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 2021, Pelotas. **Anais eletrônicos**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2021. Disponível em: https://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2021/CE_02574.pdf. Acesso em: 10 ago. 2022.

ÖZISIK, M. Necati. **Heat Conduction**. 2nd edition. New York: John Wiley Sons, 1993.