ANÁLISE DE UM PROBLEMA DE PERTURBAÇÃO SINGULAR VIA MÉTODO DAS EXPANSÕES EMPARELHADAS

DOUGLAS MACHADO DA SILVA[1]; LESLIE D. PÉREZ FERNÁNDEZ[2]; ALEXANDRE MOLTER[3], JULIÁN BRAVO CASTILLERO[4]

[1]Universidade Federal de Pelotas, PPGMMAT– Doumach99@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas, IFM-alexandre.molter@ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal de Pelotas, IFM – leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[4] Universidade Nacional Autónoma de México, IIMAS- julian@mym.iimas.unam.mx

1. INTRODUÇÃO

Dentre as inúmeras ferramentas matemáticas para aproximação de soluções, tem-se a teoria das perturbações, onde segundo (NAYFEH, 1993), é a mais importante entre as técnicas analíticas. Os métodos de perturbação têm como finalidade decompor o problema original em uma sequência recorrente de problemas mais simples envolvendo um parâmetro pequeno $0 < \varepsilon \ll 1$, afim de encontrar uma solução aproximada do problema. Com estes problemas mais simples, constrói-se uma solução assintótica formal do problema (SAF). Dentre os problemas de perturbação, estes se dividem em dois tipos: perturbação regular e perturbação singular. A característica que diferencia estes tipos de problema de perturbação é que para problemas de perturbação singular, a natureza do problema se modifica à medida que o parâmetro pequeno ε diminui, enquanto que para problemas de perturbação regular, a natureza do problema se mantém. Neste presente trabalho será ilustrado um problema de perturbação singular, onde emprega-se o método das expansões emparelhadas, afim de encontrar uma boa aproximação da solução do problema original. Como referencial teórico utiliza-se também (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) e (LAGERSTROM ,1988).

2. METODOLOGIA

Para cada $0 < \varepsilon \ll 1$, procura-se uma solução assintótica da solução exata $u(t,\varepsilon) = u^{\varepsilon}(t) \in C^1[0,+\infty)$, do problema de perturbação singular adimensional

$$\varepsilon \frac{du^{\varepsilon}}{dt} + u^{\varepsilon} = e^{t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1}$$

$$u^{\varepsilon}(0) = 0, \tag{2}$$

dada por

$$u^{\varepsilon}(t) = \frac{e^{t} - e^{-t/\varepsilon}}{1+\varepsilon}. \tag{3}$$

Note que fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, obtemos da equação diferencial em (1) a seguinte equação funcional algébrica

$$u^0(t) = e^{t}, \tag{4}$$

a qual não satisfaz a condição de inicial em (2). O que mostra que a natureza do problema não se mantém quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.

Se procurarmos a SAF do problema (1)-(2) de acordo com o procedimento padrão para perturbação regular da forma

$$u^{(\infty)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t), \tag{5}$$

e tomando o truncamento de ordem $O(\varepsilon)$, ou seja $u^{(0)}(t) = u_0(t)$, obtemos (4).

Note que quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, (4) é um boa aproximação da solução exata em (3) para t suficientemente grande, mas ruim na vizinhança de $t = 0$. Assim, tem-se que (4) é chamada de expansão exterior.

O método das expansões emparelhadas propõe o emparelhamento com outra expansão, chamada expansão interior, que seja boa na vizinhança de $t = 0$. Para isso, considera-se uma transformação que *estica* a variável t na vizinhança do zero. Assim, considera-se uma nova variável independente

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Com essa mudança de escala, introduz-se a nova incógnita $v^\varepsilon(\tau) = u^\varepsilon(\varepsilon\tau)$. Assim, utilizando que

$$\frac{du^\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{dv^\varepsilon}{d\tau},$$

o problema em (1)-(2) transforma-se no seguinte problema de perturbação regular

$$\frac{dv^\varepsilon}{d\tau} + v^\varepsilon = e^{\varepsilon\tau}, \qquad \tau \in \mathbb{R}_+^*. \tag{7}$$

$$v^\varepsilon(0) = 0. \tag{8}$$

Procurando uma SAF de (6)-(7) na forma de (5), onde agora teremos funções $u_k(\tau)$, obtemos tomando o truncamento de ordem $O(\varepsilon)$, ou seja $v^{(0)}(\tau) = v_0(\tau)$ e fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, o seguinte problema

$$\frac{dv_0}{d\tau} + v_0 = 1, \qquad \tau \in \mathbb{R}_+^* \tag{9}$$

$$v_0(0) = 1, \tag{10}$$

cuja solução é dada por

$$v(\tau) = 1 - e^{-\tau},$$

a qual , na variável original é

$$v_0^\varepsilon(t) \equiv v_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = 1 - e^{-t/\varepsilon} \tag{11}$$

Note que a expressão em (11) satisfaz a condição em (2) na forma $v_0^\varepsilon(0) = 0$ para todo ε. Assim, temos uma expansão interior da solução exata dada em (11).

Com a expansão exterior que aproxima bem a solução exata para t suficientemente grande, dada em (4) e a expansão interior que aproxima bem a solução exata na vizinhança de $t = 0$, dada em (11), propõe-se uma expansão composta $u_c^\varepsilon(t)$ formada pela superposição das expansões exterior e interior, corrigida pelo emparelhamento delas

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} u_0(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} v_0^\varepsilon(t) = 1,$$

ou seja

$$u_c^\varepsilon(t) = u_0(t) + v_0^\varepsilon(t) - \lim_{t \longrightarrow 0^+} u_0(t) = u_0(t) + v_0^\varepsilon(t) - \lim_{t \longrightarrow +\infty} v_0^\varepsilon(t)\,.$$

Assim, obtemos a expansão composta

$$u_c^\varepsilon(t) = e^t - e^{-t/\varepsilon}. \tag{12}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Note que a expansão em (12) cumpre a condição (2) e aproxima bem a solução exata do problema (1)-(2) em todo o domínio para ε suficientemente pequeno, como ilustrado na figura 1.

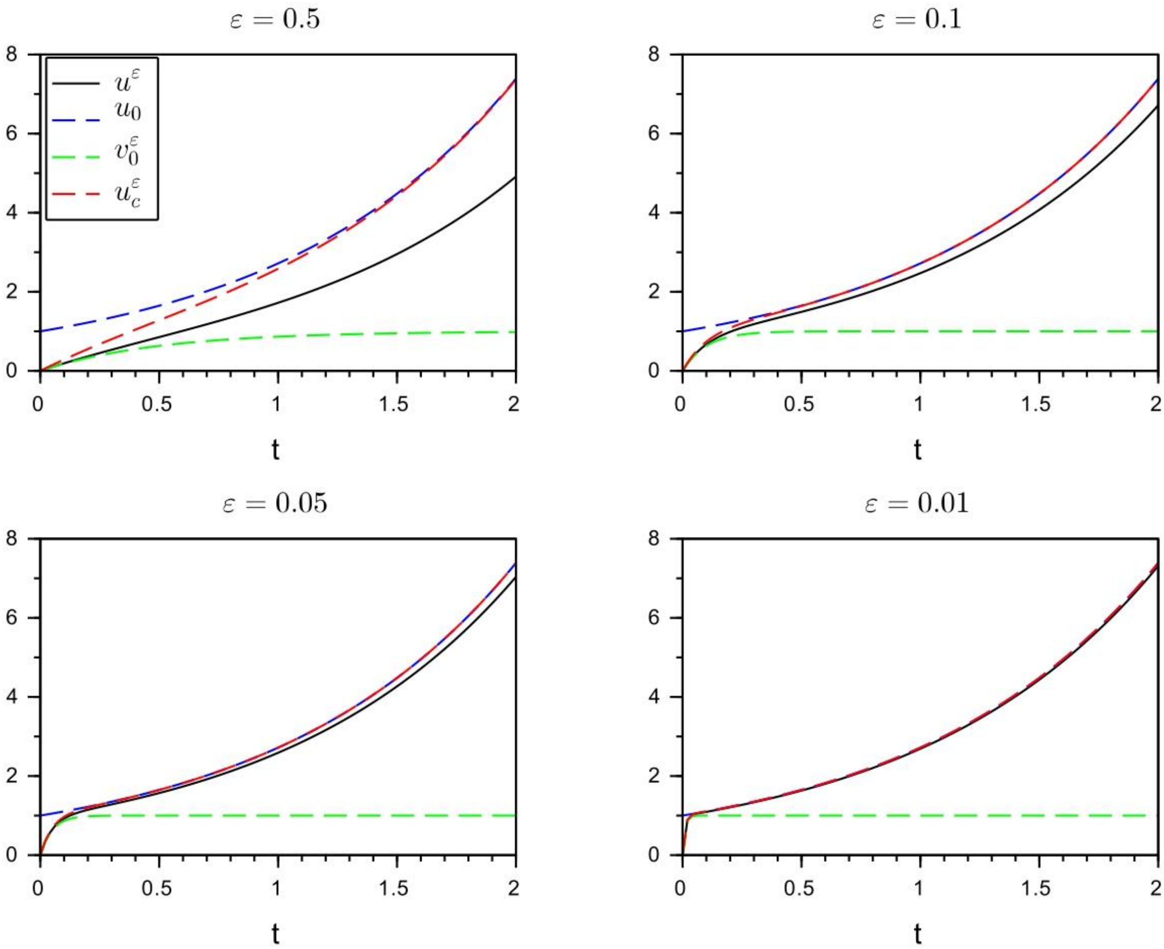

Figura 1: Comparação dos comportamentos da expansão exterior $u_0(t)$, a expansão interior $v_0^\varepsilon(t)$, a expansão composta $u_c^\varepsilon(t)$ e a solução exata u^ε para valores decrescentes de ε.

Graficamente, pode-se observar que de fato a expressão em (12) aproxima melhor a solução exata do problema em todo domínio à medida que $\varepsilon \longrightarrow 0^+$. Mas pode-se mostrar que de fato isso ocorre, já que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} |u^\varepsilon(t) - u_c^\varepsilon(t)| = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \left| \frac{e^t - e^{-t/\varepsilon}}{1+\varepsilon} - e^t + e^{-t/\varepsilon} \right| = 0.$$

4. CONCLUSÕES

Pode-se perceber que a utilização da teoria de perturbações, em particular o método das expansões emparelhadas, se mostrou eficaz para aproximar com boa precisão a solução do problema. Tal fato é relevante pois a expressão analítica fechada da solução exata de muitos problemas não está disponível e, assim, o método das expansões emparelhadas é uma abordagem alternativa capaz de fornecer aproximações de boa qualidade para a solução exata e que reproduzem seu comportamento mesmo que assintóticamente.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001 (DMS), e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq via Projeto Universal Nº402857/2021-6 (LDPF, JBC).

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

LAGERSTROM, P. A. (1988) **Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques**. New York: Springer-Verlag, 264p. DOI: 10.1007/978-1-4757-1990-1.