ANÁLISE DE PRECISÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO DA TRANFORMADA DE LAPLACE APLICANDO EM UM PVIC

CÁSSIO FEHLBERG LEMOS[1]; LESLIE D. PÉREZ-FERNÁNDEZ[2]; CAMILA PINTO DA COSTA[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – cflemos@inf.ufpel.edu.br
[2]Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal de Pelotas – camila.costa@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Ao trabalhar com equações diferenciais, a transformada de Laplace pode ser uma poderosa aliada. Através dela é possível modificar equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias (EDOs) e EDOs em equações algébricas. Sua definição, para uma função $f(t)$, é dada por $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, onde $t > 0$ e s é um número real ou complexo. A inversão desta operação é definida pela integral de Bromwich $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{y-i\infty}^{y+i\infty} e^{st}F(s)ds$ e é, em geral, muito difícil de realizar diretamente (TONIDANDEL; DE ARAÚJO, 2012). Alternativamente, para calcular essa inversão, podemos contar os com métodos numéricos (ver Tabela 1).

Tabela 1. Alguns métodos numéricos de inversão da transformada de Laplace

Método	Fórmula
Talbot Fixo	$f(t,\ M) = \frac{r}{M}\left\{\frac{1}{2}F(r)e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} Re\left[e^{ts(\theta_k)}F\left(s(\theta_k)\right)\left(1+i\sigma(\theta_k)\right)\right]\right\}$ (ABATE; VALKÓ, 2004)
Dubner-Abate	$f(t,T) = \frac{2e^{at}}{T}\left[\frac{1}{2}Re\{F(a)\} + \sum_{k=1}^{NSUM} Re\{F(\alpha)\}\cos(\theta)\right]$ (DUBNER; ABATE, 1968)
Durbin	$f(t,T) = \frac{e^{at}}{T}\left[-\frac{1}{2}Re\{F(a)\} + \sum_{k=0}^{NSUM} Re\{F(\alpha)\}\cos(\theta) - Im\{F(\alpha)\}\sin(\theta)\right]$ (DURBIN, 1974)
Gaver-Stehfest	$f(t,N) = \frac{\ln 2}{t}\sum_{i=1}^{N} V_i F\left(\frac{\ln 2}{t}i\right)$ (TOMASCHEWSKI, 2012)
Euler	$f(t,m) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^{-m}s_{n+j}(t)$ (ABATE; WHITT, 1995)

Em um trabalho anterior (LEMOS et al., 2021), apresentamos experimentos numéricos que mostraram que, dentre os métodos na Tabela 1, e para as funções-teste estudadas, o método Talbot-Fixo produz os melhores resultados em precisão e também apresentou um bom desempenho em relação a tempo de execução. Ainda em LEMOS et al. (2021), aplicamos o método de Talbot Fixo na resolução de um problema de valores iniciais e de contorno (PVIC) que modela a distribuição de temperatura em uma barra homogênea em comparação com sua solução exata.

O objetivo do presente trabalho é aferir a precisão dos outros métodos na Tabela 1 no mesmo problema de distribuição de temperatura na barra, assim como foi visto para o Talbot Fixo.

2. METODOLOGIA

Considere o seguinte PVIC que modela a difusão do calor em uma barra homogênea com difusividade térmica k^2 e comprimento unitário, em que a temperatura $u(t,x)$ é nula nas extremidades e está inicialmente distribuída senoidalmente:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, t > 0, \\ u(0,x) = sen(\pi x), 0 < x < 1. \end{cases}$$

Através da aplicação da transformada de Laplace no PVIC e da resolução do PVC para a EDO resultante, é obtida a seguinte solução no espaço de Laplace:

$$U(s,x) = \frac{sen(\pi x)}{k^2\pi^2 + s},$$

em que $U(s,x) = \mathcal{L}\{u(t,x)\}$. Logo, aplicando a transformada de Laplace inversa analiticamente a $U(s,x)$, obtém-se a solução $u(t,x)$ do PVIC dada por (FERREIRA, 2019):

$$u(t,x) = sen(\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}.$$

Para analisar a precisão dos métodos numéricos, iremos inverter $U(s,x)$ com eles e comparar com o resultado obtido através de $u(t,x)$ utilizando do erro máximo absoluto entre eles. Os cálculos serão realizados através de códigos implementados por mim no scilab 6.0.2 (BAUDIN, 2011) com um processador Intel(R) Core(TM) i5-10300H e com 8GB de memória RAM.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Figura 1 apresentamos os gráficos para $0 \leq x \leq 1$ e $0 < t \leq 10$ da solução exata $u(t,x)$ (a), e suas aproximações obtidas das inversões numéricas de $U(s,x)$ pelos métodos de Talbot Fixo (b), Dubner-Abate (c), Durbin (d), Gaver-Stehfest (e) e Euler (f). Aqui já é possível notar que o método numérico Durbin foi o que mais se distanciou da função exata, enquanto os demais apresentaram gráficos semelhantes.

Para uma melhor discussão dos resultados foi gerada uma tabela com o erro máximo absoluto para cada um dos métodos utilizados. Isso pode ser observado na Tabela 2.

Tabela 2. Erro máximo absoluto dos algoritmos da Tabela 1

Talbot Fixo	Dubner-Abate	Durbin	Gaver-Stehfest	Euler
2,42E-04	1,00E-02	5,035E-01	3,8E-06	6,076E-09

De acordo com a tabela 2, é possível percerber que os melhores desempenhos foram obtidos por Euler, Gaver-Stehfest e Talbot Fixo, respectivamente. Dubner-Abate e Durbin não tiveram uma boa precisão, tendo um erro máximo absoluto mais elevado que os demais métodos.

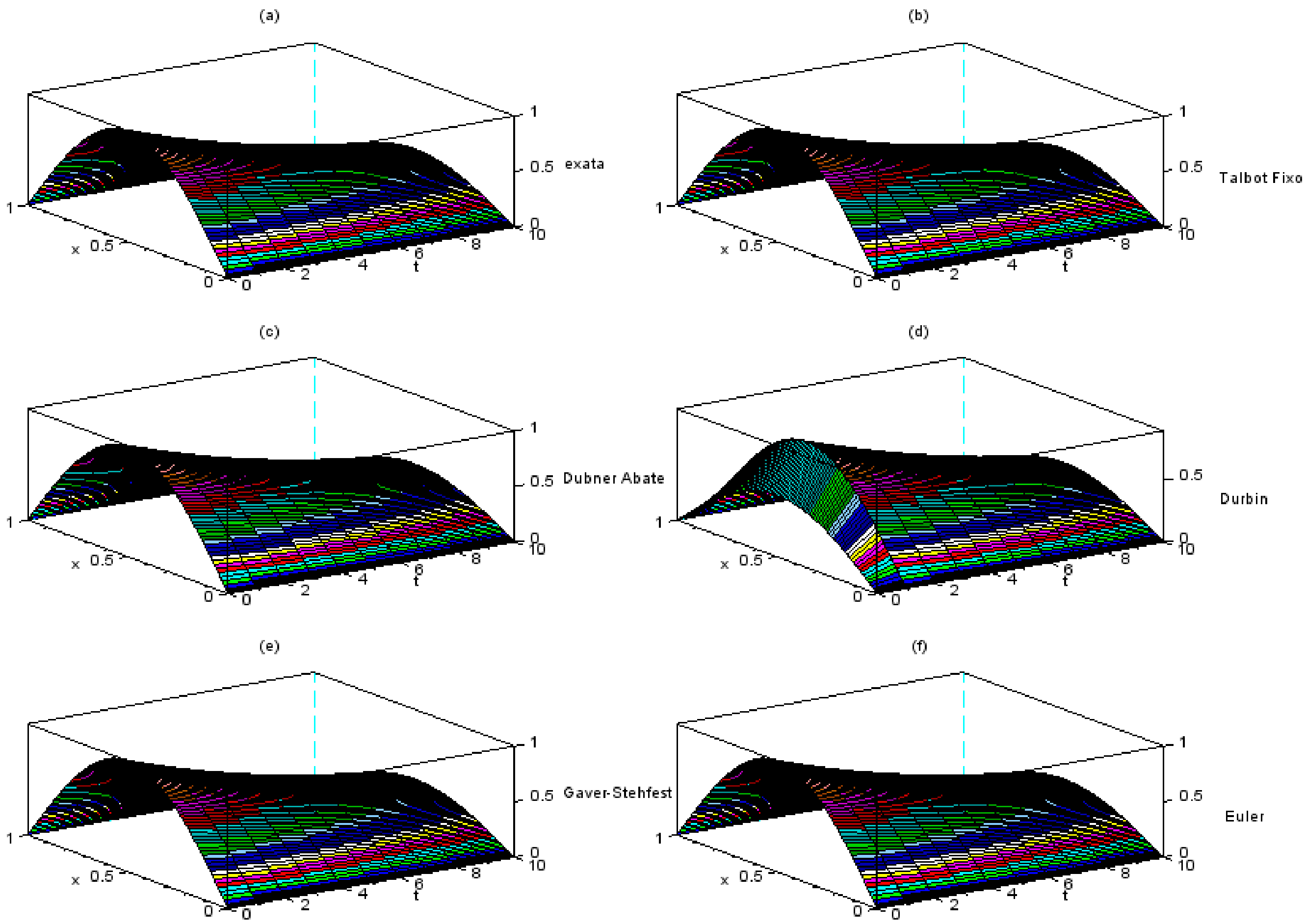

Figura 1. Comparação entre a solução exata e suas aproximações pelos métodos numéricos de inversão da Tabela 1.

4. CONCLUSÕES

Diferentemente do nosso trabalho anterior (LEMOS et al., 2021), onde Talbot Fixo demonstrou melhor desempenho com todas as funções-teste, o mesmo não acontece aqui. Ao analisarmos a inversão com métodos numéricos para a equação de distribuição de temperatura em uma barra, podemos verificar que quem apresentou os melhores resultados foi Euler, seguido por Gaver-Stehfest e Talbot Fixo. Interessante notar que mesmo o Talbot Fixo apresentando os melhores resultados com as funções testes no trabalho mencionado anteriormente, o método numérico de Euler já havia destacado lá e mostrado um ótimo desempenho. Com isso podemos concluir que mesmo não tendo o melhor desempenho entre os métodos analisados, Talbot Fixo continua sendo um método numérico de inversão confiável, e que, dentre os métodos numéricos de inversão estudados, Euler é o mais preciso quando trabalhando com distribuição de temperatura em uma barra.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a FAPERGS pelo fomento à pesquisa.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABATE, J.; VALKÓ, P. P. Multi-precision Laplace transform inversion. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, Hoboken, v. 60, n. 5, p. 979-993, 2004.

ABATE, J.; WHITT, W. Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions. **ORSA Journal on Computing**, Catonsville, v. 7, n. 1, p. 36-43, 1995.

BAUDIN, M. **Programming in Scilab**. set. 2011. Acessado em 13 set. 2020. Disponível em: https://www.scilab.org/sites/default/files/progscilab-v.0.10_en.pdf

DUBNER, H.; ABATE, J. Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform. **Journal of the ACM**, New York, v. 15, n.1, p. 115-123, 1968.

DURBIN, F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. **The Computer Journal**, Oxford, v. 17, n. 4, p. 371-376, 1974.

FERREIRA, A. M. **HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA COM TRANSFORMADA DE LAPLACE NA MODELAGEM DE MEIOS MICROPERIÓDICOS**. 2019. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas.

HSU, J.T.; DRANOFF, J.S. Numerical inversion of certain laplace transforms by the direct application of fast fourier transform (FFT) algorithm. **Computers & Chemical Engineering**, Texas A&M University College Station, College Station, Texas, United States, v. 11, n. 2, p. 101-110, 1987.

KUZNETSOV A. On the Convergence of the Gaver-Stehfest Algorithm, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Philadelphia, vol. 51, no. 6, pp. 2984–2998, 2013.

LEMOS, C. F. ; COSTA, C. P. DA; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; FERREIRA, A. M.; SILVA, E. C. Análise do Desempenho de Métodos Numéricos de Inversão da Transformada de Laplace. **Intermaths**, Vitória da conquista, Bahia, v.2, n.2, p. 75 - 90, 2021.

TOMASCHEWSKI, F. K. **Solução da Equação S_N Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo**. 2012. 75f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

TONIDANDEL, D. A. V.; DE ARAÚJO A. E. A. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 34, n. 2, p. 1-6, 2012.

ZANGA W. **Stable numerical Laplace Transform inversion technique without over-and undershoot**. 2018. Master's thesis, Computing Science, Imperial College London.