SIMULAÇÃO ANALÍTICA UNIDIMENSIONAL DA DISPERSÃO DE POLUENTES CONSIDERANDO O FLUXO CONTRA-GRADIENTE

VILIAM CARDOSO DA SILVEIRA[1]; LUCAS TADEO[2]; LUCAS DA COSTA BERNA[3]; DANIELA BUSKE[4]

[1]*Universidade Federal de Pelotas - viliamcardoso2@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas - lucas1tadeo@gmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas - lucas.berna@hotmail.com*
[4]*Universidade Federal de Pelotas - danielabuske@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

A preservação da qualidade do ar é um tópico que vem crescendo muito ao longo dos anos. A emissão de poluentes tem aumentando consideravelmente com o desenvolvimento industrial, ocasionando severos danos à qualidade do ar.

Diversos estudos já foram desenvolvidos para estudar a dispersão de poluentes na atmosfera considerando a equação da advecção-difusão em diversas condições de estabilidade atmosférica e utilizando a técnica GILTT (Generalized Integral Laplace transform Technique). A inovação desse trabalho é considerar a equação da difusão na sua forma mais simples, uma vez que o problema unidimensional com fechamento não local da turbulência ainda não foi resolvido pela técnica GILTT.

Neste trabalho será avaliada a dispersão de poluentes na atmosfera, considerando a equação da difusão transiente unidimensional e o termo de fechamento não local da turbulência. Essa equação será resolvida pela técnica da transformada integral generalizada com solução analítica do problema transformado por transformada de Laplace (GILTT). Para validar a metodologia serão consideradas condições atmosféricas instáveis para avaliar o termo de variação não local da turbulência.

Buligon et al., 2006 apresentaram uma solução semi-analítica para calcular a dispersão de poluentes na atmosfera utilizando a equação do telégrafo e fluxo contra-gradiente. Assim, neste trabalho vamos fazer algo similar mas de forma analitica e utilizando a técnica GILTT.

2. METODOLOGIA

A equação transiente da difusão unidimensional pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'c'}}{\partial z}, \tag{1}$$

sendo $\bar{c}(z,t)$ a concentração média de poluentes (g/m^3) e $\overline{w'c'}$ o fluxo turbulento de contaminantes na vertical $(g/s\,m^2)$. A Eq. (1) apresenta duas variáveis desconhecidas, a concentração média e o fluxo turbulento, por isso essa equação não pode ser resolvida diretamente, levando ao chamado problema de fechamento da turbulência.

A equação do fluxo turbulento dependente do tempo pode ser escrita como:

$$\left(1 + \left(\frac{S_k \sigma_w T_{lw}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{w'c'} = -K_z \frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z}, \tag{2}$$

sendo S_k o coeficiente de assimetria, σ_w o desvio padrão da velocidade turbulenta vertical (m/s), T_{lw} a escala de tempo Lagrangeana (s), τ o tempo de relaxação (s) e K_z o coeficiente de difusão (m^2/s). Pode-se definir o termo de contra-gradiente (β) como $\beta = (S_k \sigma_w T_{lw})/2$. Assim, a Eq. 2 pode ser escrita como:

$$\left(1+\beta\frac{\partial}{\partial z}+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{w'c'} = -K_z\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z}. \quad (3)$$

Substituindo a Eq. (3) na Eq. (1), pode-se escrever a seguinte equação:

$$\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\beta\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau\frac{\overline{w'c'}}{\partial t}\right). \quad (4)$$

A Eq. (4) esta sujeita as condições de contorno de fluxo zero $\left(K_z\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z}=0\right)$ no solo $(z=0)$ e no topo da camada limite convectiva $(z=h)$ e condição de fonte dada por: $\bar{c}(z,0)=Q\delta(z-H_s)$, sendo Q a intensidade da fonte (g/s), δ a função delta de Dirac e H_s a altura da fonte (m).

Pelo teorema de Cauchy-Euler e pela Eq. (1) pode-se escrever a seguinte equação:

$$\tau\frac{\partial^2 \bar{c}(z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t} = K_z\frac{\partial^2 \bar{c}(z,t)}{\partial z^2}+K_z'\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z}-\beta\frac{\partial^2 \bar{c}(z,t)}{\partial z\partial t}-\beta'\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t}. \quad (5)$$

Aplicando a técnica da transformada integral na variável z, expande-se a concentração de poluentes como

$$\bar{c}(z,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\bar{c_i}(t)\Psi_i(z). \quad (6)$$

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (5), utilizando um problema auxiliar de Sturm-Liouville $[\Psi_i''(z)+\lambda_i^2\Psi_i(z)=0]$ em $0<z<h$, com $\Psi_i(z)=cos(\lambda_i z)$ sendo $\lambda_i=\frac{i\pi}{h}$ $(i=0,1,2,\cdots)$ o conjunto de autovalores e multiplicando pelo operador integral $\int_0^h(\cdot)\,\Psi_j(z)dz$, pode-se escrever:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\overline{c_i''}(t)\int_0^h\tau\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz+\sum_{i=0}^{\infty}\overline{c_i'}(t)\int_0^h\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz$$
$$=-\sum_{i=0}^{\infty}\bar{c}_i(t)\lambda_i^2\int_0^h K_z\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz+\sum_{i=0}^{\infty}\bar{c}_i(t)\int_0^h K_z'\Psi_i'(z)\Psi_j(z)dz$$
$$-\sum_{i=0}^{\infty}\overline{c_i'}(t)\int_0^h\beta\Psi_i'(z)\Psi_j(z)dz-\sum_{i=0}^{\infty}\overline{c_i'}(t)\int_0^h\beta'\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz. \quad (7)$$

Reescrevendo a Eq. (7) em notação matricial tem-se

$$Y''(t)+FY'(t)+GY(t)=0, \quad (8)$$

onde $Y(t)$ é o vetor coluna cujas componentes são $\bar{c}_i(t)$. A matriz F é dada por $F=C^{-1}.B$ e a matriz G é dada por $G=C^{-1}.A$. As matrizes C, B e A são dadas respectivamente por

$$C_{i,j}=\int_0^h\tau\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz,$$
$$B_{i,j}=\int_0^h\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz+\int_0^h\beta\Psi_i'(z)\Psi_j(z)dz+\int_0^h\beta'\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz,$$
$$A_{i,j}=\lambda_i^2\int_0^h K_z\Psi_i(z)\Psi_j(z)dz-\int_0^h K_z'\Psi_i'(z)\Psi_j(z)dz.$$

Aplicando uma redução de ordem na Eq. (8) e considerando $Z_1(t)=Y(t)$ e $Z_2(t)=Y'(t)$, pode-se escrever a seguinte EDO na forma matricial

$$Z^{'}(t) + H.Z(t) = 0, \qquad (9)$$

no qual o vetor $Z(t)$ é dado por $Z(t) = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{bmatrix}$ e a matriz H tem a forma de bloco dada por $H = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ G & F \end{bmatrix}$.

A Eq. (9) é resolvida pela Técnica da Transformada de Laplace e diagonalização (BUSKE et al., 2012).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para validar o modelo, foram utilizados dados do experimento 8 de Copenhagen (GRYNING e LYCK, 1984). A altura da camada limite convectiva é $z_i = 810\, m$, a velocidade convectiva é $w_* = 2{,}2\ m/s$. As simulações foram realizadas para o período de tempo de $1\ h$. O tempo de relaxação considerado é de $\tau = 0{,}5\, s$ e a taxa de emissão da fonte de $Q = 100\ g/s$. Foram feitas simulações nas alturas de 1 e $750\, m$ em duas alturas de fonte $H_s = 25\, m$ e $H_s = 305\, m$. A concentração adimensional é dada por $C^* = (C\, z_i)/Q$, o tempo adimensional é dado por $t^* = (t\, w_*)/z_i$, a altura adimensional é dada por $z^* = z/z_i$ e a altura da fonte adimensional é dada por $H_s^* = H_s/z_i$.

A Figura 1 mostra a simulação da concentração de poluentes em função do tempo na altura $z = 1\, m$ e a Figura 2 mostra a simulação da concentração de poluentes na altura $z = 750\, m$ para diferentes valores do coeficiente de assimetria.

Através da Figura 1 observa-se que para alturas próximas do solo, a concentração de poluentes para pequenos tempos de viagem é maior à medida que a altura da fonte é diminuída e os intervalos onde ocorrem os valores máximos de concentração também diminuem. A concentração de poluentes mais elevada foi obtida para fonte mais baixa e é foi onde foi observada a menor influência do coeficiente de assimetria. Para as três alturas de fontes analisadas, a concentração de poluentes tende a homogeneizar-se conforme o tempo passa.

Para alturas próximas do topo da camada limite convectiva (Figura 2), o coeficiente de assimetria não influenciou nos valores máximos de concentração como para o caso de alturas próximas do solo (Figura 1). A concentração de poluentes tende a homogeneizar-se na concentração máxima. Quanto mais alta é a fonte, mais rápido ocorre a homogeneização da concentração. Conforme a altura da fonte diminui, aumenta a influência do coeficiente de assimetria.

Os resultados obtidos neste trabalho utilizando a técnica da transformada integral e o fechamento não local da turbulência para resolver a equação da difusão unidimensional estão de acordo com outros resultados obtidos na literatura que utilizam outros modelos para tal fim.

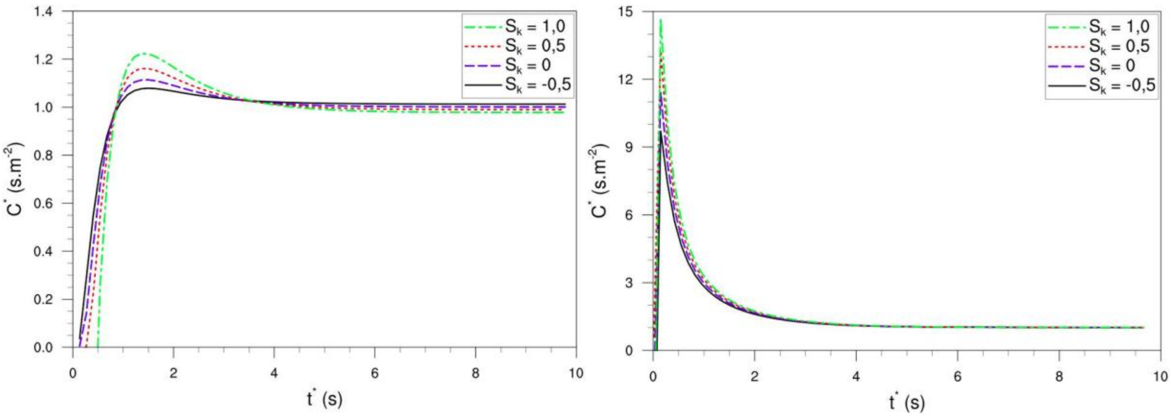

Figura 1: Concentração de poluentes em função do tempo para diferentes assimetrias em $z^{*} = 0{,}001$ e $H_s^{*} = 0{,}37$ (Figura da esquerda) e $H_s^{*} = 0{,}03$ (Figura da direita).

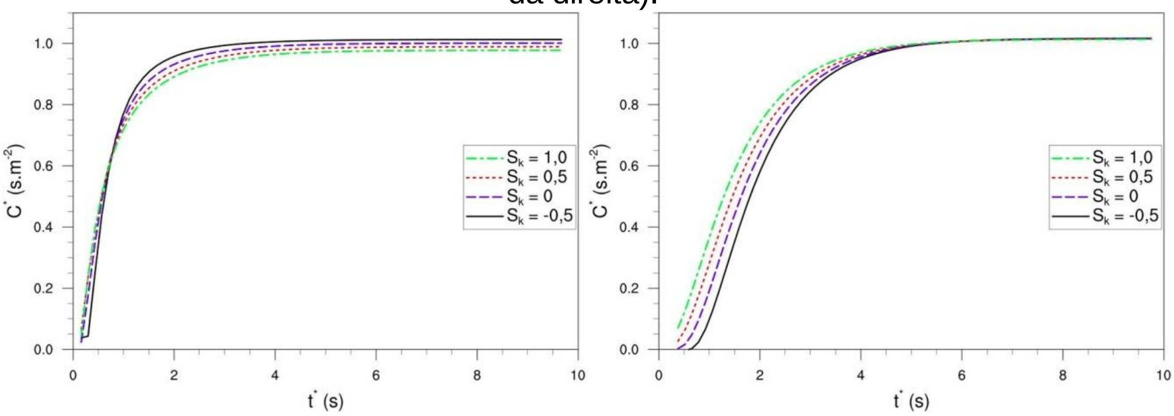

Figura 2: Concentração de poluentes em função do tempo para diferentes assimetrias em $z^{*} = 0{,}925$ e $H_s^{*} = 0{,}37$ (Figura da esquerda) e $H_s^{*} = 0{,}03$ (Figura da direita).

4. CONCLUSÕES

A concentração de poluentes é simulada de forma satisfatória considerando o termo de fechamento não local da turbulência. O modelo simula as concentrações de poluentes de acordo com outros resultados obtidos na literatura e se torna uma ferramenta atrativa por apresentar uma solução analítica do problema. Assim, o presente modelo pode ser utilizado para aplicações regulatórias da qualidade do ar.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUSKE, D.; VILHENA, M.; TIRABASSI, T.; BODMANN, B. Air pollution steady-state advection-diffusion equation: the general three-dimensional solution. **Journal of Environmental Protection**. v.4, 1-10, 2012.

BULIGON, L.; VILHENA, M. T. M. B; MOREIRA, D. M.Uma solução semi-analítica da dispersão de poluentes com a equação do telégrafo e fluxo contra-gradiente. **Revista Brasileira de Meteorologia**, v. 21, 77-85, 2006.

GRYNING, S. E.; LICK, E. Atmospheric Dispersion from Elevated Sources in an Urban Area: Comparison between Tracer Experiments and Model Calculations. **Journal of Applied Meteorology**, v. 23, 651-654, 1984.