EXISTEM RETAS SOBRE A ESFERA?

ANDRESSA LIXIESKI MANSKE[1]; MARÍLIA KASTER PORTELINHA[2]; LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER[3]

[1] *Universidade Federal de Pelotas – andressalmanske@gmail.com*
[2] *Universidade Federal de Pelotas – marilialimatlg@gmail.com*
[3] *Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

No curso de Licenciatura em Matemática, as disciplinas obrigatórias de Geometria são voltadas para o estudo da Geometria Euclidiana, plana e espacial, sendo as Geometrias não Euclidianas não contempladas de forma obrigatória na matriz curricular do curso. Assim, a Iniciação Científica em Geometria proporciona um estudo de assuntos não vistos no curso de Licenciatura em Matemática, particularmente em uma das ações, assuntos de Geometria Esférica.

Neste trabalho serão apresentadas algumas distinções entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica, em particular, as retas e a distância entre dois pontos em ambas as Geometrias. O referido tema foi escolhido como objeto de estudo deste trabalho em virtude da importância da abordagem de tais conceitos, visto que, não vivemos em uma Terra plana, como muito ainda é difundido atualmente, dessa forma, esses assuntos servem de subsídio para a compreensão, por exemplo, da rota aérea dos aviões.

2. METODOLOGIA

A Iniciação Científica em Geometria, voltada para o estudo da Geometria Esférica, visa iniciar os alunos envolvidos à pesquisa na área da Matemática Pura, especificamente estudar Geometria Esférica, introduzir conceitos matemáticos mais gerais, não trabalhados no curso de graduação e desenvolver o Raciocínio Lógico-Matemático. No momento o projeto encontra-se no estudo da derivada covariante na esfera, assim, este trabalho visa abordar propriedades da Geometria Esférica estudadas ao longo da Iniciação Científica.

Foi realizada a revisão bibliográfica sobre princípios da Geometria Esférica, como círculos máximos, menor distância entre dois pontos na esfera (SILVA, 2015) e seu sistema de coordenadas (ADAMES, 2005). Posteriormente, foi realizada a revisão bibliográfica sobre derivada covariante (SOTO, 2018) para a análise da derivada covariante ao considerarmos a superfície como sendo a esfera. Os estudos e discussões foram realizados de forma remota através de encontros semanais com as alunas e a orientadora do projeto, utilizando a plataforma WEBConf da UFPel.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

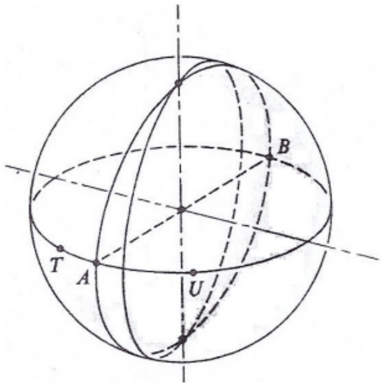
A Geometria Esférica é caracterizada por ser uma Geometria não Euclidiana, ou seja, uma Geometria baseada em um sistema axiomático diferente do encontrado na Geometria Euclidiana. Dessa forma, as análises não passam a ocorrer mais no plano, mas sim em uma esfera.

Podemos tratar de retas em ambas Geometrias, no entanto, em versões distintas, visto que, na Geometria Euclidiana uma reta possui comprimento infinito, já na Geometria Esférica o correspondente a uma reta no plano é um **círculo máximo**, que de acordo com SILVA (2015) pode ser assim definido:

Definição: Seja S a superfície de uma esfera no espaço. Um círculo máximo é um círculo que é a interseção de S com um plano através do seu centro.

Assim, as "retas" sobre a superfície esférica possuem comprimento finito, conforme ilustrado na Figura 1.

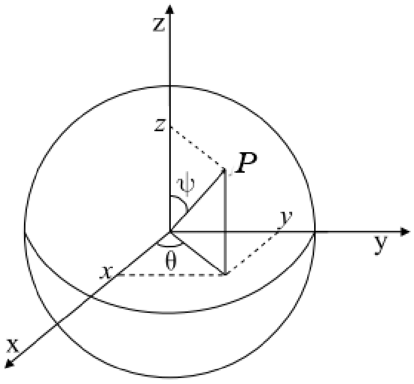
Figura 1: Círculos máximos na esfera



Fonte: SILVA, 2015

No que diz respeito ao sistema de coordenadas, de acordo com ADAMES (2015), no sistema de coordenadas cartesianas, associamos a cada ponto P de $\mathbb{R}^3$ uma tripla (x, y, z), onde x é a projeção de P sobre o eixo x, y é a projeção de P sobre o eixo y e z é a projeção de P sobre o eixo z, que chamamos de coordenadas de P. No sistema de coordenadas esféricas, as coordenadas de um ponto P são dadas por ρ, θ e ψ, conforme Figura 2, e possuem a seguinte relação com as coordenadas cartesianas:

Figura 2: Sistema de coordenadas esféricas



Fonte: ADAMES, 2005

$$x = \rho \cdot cos\,\theta \cdot sen\,\psi$$
$$y = \rho \cdot sen\,\theta \cdot sen\,\psi$$
$$z = \rho \cdot cos\,\psi$$

onde:

ρ é a distância de P à origem.

θ é o angulo, medido em radianos, entre a projeção de OP sobre o plano xy e o eixo x.

ψ é o ângulo, medido em radianos, entre OP e o eixo z.

Ao pensarmos na distância entre dois pontos, é comum nos reportarmos a ideia de que a menor distância entre tais pontos é um segmento de reta, o que é verdade quando consideramos a Geometria Euclidiana, porém, quando consideramos a Geometria Esférica, a menor distância entre dois pontos não é mais um segmento de reta e sim um arco de círculo máximo, conforme definição de SILVA (2015) e ilustrado na Figura 1, se T e U são pontos quaisquer de S, então o menor caminho na superfície entre T e U é um arco de um círculo máximo.

Em relação ao comprimento, estamos acostumados a medir o segmento de reta, mas também podemos medir trechos de curvas utilizando cálculo diferencial e integral. Sobre a esfera calculamos da seguinte forma:

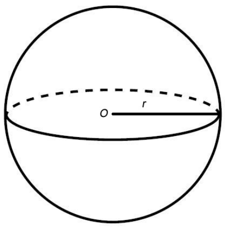
Seja $\gamma(x(t), y(t), z(t)) = (\rho \cdot cos\theta(t) \cdot sen\psi(t), \rho \cdot sen\theta(t) \cdot sen\psi(t), \rho \cdot cos\psi(t))$, uma curva sobre a esfera e $\theta(t), \psi(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis.

Para calcularmos o comprimento "C" de γ precisamos calcular:

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \rho \int_a^b \sqrt{sen^2(\psi(t)).(\theta'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$$

Por exemplo, vamos considerar uma esfera de raio igual a 1, calculando o comprimento do Equador, conforme indicado na Figura 3, temos:

Figura 3: Representação do Equador



Fonte: ESCOLA EDUCAÇÃO

$$\psi(t) = \tfrac{\pi}{2} \to \psi'(t) = 0$$
$$0 < \theta(t) < 2\pi$$
$$\theta(t) = t \to \theta'(t) = 1$$

$$\int_a^b \sqrt{sen^2(\psi(t))(\theta'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = t|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Dessa forma, podemos observar que o valor encontrado para o comprimento do Equador coincide com o intervalo de $\theta(t)$, ou seja, 2π.

Outra característica importante das retas no Euclidiano é que os seus vetores tangentes possuem variação constante. Isto também pode ser observado sobre os círculos máximos da esfera. Para percebermos isso precisamos identificar esta variação sobre a esfera desconsiderando o espaço onde ela está mergulhada, utilizando a **derivada covariante**, que segundo (SOTO, 2018) pode ser assim definida:

Definição: Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$, seja $\alpha : l \longrightarrow S$ uma curva parametrizada em S, e seja X um campo vetorial tangente a S ao longo de α de classe C^∞. A derivada covariante de X é o campo vetorial X' tangente a S ao longo de α definido por:

$$X'(t) = \dot{X}(t) - [\dot{X}(t) \cdot N(\alpha(t))]\ N(\alpha(t)),$$

onde N é o campo de vetores normais a S e o $\dot{X}(t)$ é a derivada usual do $\mathbb{R}^3$.

A fim de exemplificar, consideremos uma esfera de raio igual a 1 e vamos calcular a derivada covariante do Equador (α), com campo igual a α' e de acordo com a parametrização vista anteriormente.

Temos que, $\psi(t) = \dfrac{\pi}{2}$ e $0 < \theta(t) < 2\pi$, fazendo uma substituição de variável teremos $\theta(t) = t$. Portanto,

$$X'(t) = \dot{X}(t) - [\dot{X}(t) \cdot N(\alpha(t))]\ N(\alpha(t))$$

$$X'(t) = (-cos(t), -sen(t), 0) - [(-cos(t), -sen(t), 0) \cdot (cos(t), sen(t), 0)]\ (cos(t), sen(t), 0)$$

$$X'(t) = (-cos(t), -sen(t), 0) - (-cos(t), -sen(t), 0)$$

$$X'(t) = (0, 0, 0)$$

Desta forma, temos que a derivada covariante do Equador, que é um círculo máximo, é igual a zero.

Observação: Os círculos máximos da esfera se comportam como as retas no Euclidiano. Curvas que satisfazem esse comportamento são chamadas de geodésicas.

4. CONCLUSÕES

Comumente somos levados a pensar na Geometria Euclidiana, porém em vários aspectos, por exemplo, ao analisarmos a rota aérea dos aviões, é necessário considerarmos uma outra Geometria, distinta da Euclidiana, visto que, a Terra não é plana. Dessa forma, percebemos a importância do estudo de outras Geometria e não somente a Geometria Euclidiana, valorizando dessa forma o pensamento geométrico. Portanto, este trabalho possibilitou a comparação entre as Geometrias, ou seja, quando consideramos o plano e a esfera, ainda, este trabalho proporcionou o estudo de conceitos da Geometria Esférica e suas representações geométricas, até então desconhecidas por nós. A sequência deste trabalho será dada pela continuação dos estudos da derivada covariante na esfera e suas consequências geométricas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMES, M. R. **Geometria Esférica**. 2005. 64p. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura) - Centro de Ciências Físicas Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

ESCOLA EDUCAÇÃO. **Esfera**. R7, 2021. Acessado em 04 ago. 2021. Online. Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/esfera/

SILVA, W. D. **Uma introdução à Geometria Esférica**. 2015. 47p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2015.

SOTO, S. R. **Transporte paralelo**. 2018. 44p. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Matemática) - Faculdade de Ciências, Universidade de Cantabria, 2018.