O PROBLEMA DE BERNOULLI ATRAVÉS DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

LISANDRA PITOL[1]; LETIANE LUDWIG MIELKE[2]; GUILHERME JAHNECKE WEYMAR[3]; RUTH DA SILVA BRUM[4]; DANIELA BUSKE[5]

[1]*Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – lisandrapitol@gmail.com*
[2] *Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – letiane.mielke@gmail.com*
[3] *Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – guilhermejahnecke@gmail.com*
[4] *Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – ruthdasilvabrum@gmail.com*
[5] *Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – danielabuske@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

Recentemente, assuntos na área de epidemiologia têm ganhado um destaque nunca visto, uma vez que análises epidêmicas têm sido responsáveis por ajudar a compreender a dinâmica da epidemia de Covid-19, que está assolando toda a humanidade desde o final de 2019. Contudo, é errônea a imagem de que a epidemiologia é uma área do conhecimento contemporânea. Desde muito tempo, estudos neste ramo têm sido desenvolvidos a fim de suprir necessidades humanas. Se tratando da modelagem de epidemias, mais especificamente da modelagem matemática de doenças infecciosas, existem muitos estudos que precederam os atuais e rebuscados modelos utilizados nos dias de hoje.

Muitos dos modelos recentes tiveram suas bases lançadas a muito tempo atrás, como é o caso do estudo proposto por Daniel Bernoulli, em 1760 que, de acordo com Brauer *et.al.* (2019), trata-se do primeiro trabalho em epidemiologia matemática que se tem conhecimento. Bernoulli publicou seus estudos em dois artigos, nas revistas *Mémoires de mathématique et de physique* e *Mercure de France* (FIORAVANTI, 2020). Provavelmente, o mais difundido seja o da primeira revista, intitulado "*Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des advantages de l'inoculacion pour la prevenir*". Seu estudo

> tinha como objetivo avaliar a eficácia de um programa controverso de vacinação contra a varíola, que era, na época, uma grande ameaça à saúde pública. Bernoulli apresentou um modelo tão consistente que ainda hoje pode ser aplicado, igualmente bem, a qualquer outra doença que, se uma pessoa a contrai e sobrevive, tem imunidade para o resto da vida. (OLIVEIRA, 2020, p. 128)

Dessa forma, o presente trabalho tem por objetivo estudar uma adaptação do conjunto de equações propostas por Daniel Bernoulli (1760; 2004), apresentadas por Boyce, Diprima e Meade (2020) resolvendo-as por meio da Transformada de Laplace.

Análises de equações matemáticas deste tipo são bastante valorosas, uma vez que podem possuir aplicações que interfiram diretamente na vida das pessoas, possibilitando testes e projeções computacionais que simulem diferentes realidades, apontando possíveis caminhos e auxiliando na tomada de decisões. Um exemplo simplório é o próprio problema de Bernoulli, que através de suas análises, constatou que a eficácia do programa de inoculação era muito superior aos riscos que se tinha na época, acarretando, inclusive em um aumento da expectativa de vida, que passaria de 26 anos e 7 meses para 29 anos e 9 meses.

2. METODOLOGIA

Nesta seção, será trabalhada uma adaptação do conjunto de equações propostas por Daniel Bernoulli em 1760, apresentada por Boyce, Diprima e Meade (2020) em seu livro. Em suma, as equações são apresentadas de forma distinta que as publicadas originalmente, porém possuem o mesmo significado biológico. Seguiremos, portanto, a notação apresentada por Boyce, Diprima e Meade (2020).

Vamos considerar o conjunto de indivíduos nascidos em um dado ano ($t = 0$) e vamos supor que $n(t)$ seja o número desses indivíduos que sobrevivem t anos depois. Seja $x(t)$ o número de pessoas desse conjunto que ainda não tiveram varíola até o ano t (suscetíveis) e seja β a taxa segundo a qual indivíduos suscetíveis contraem varíola. Denotamos por ν a taxa segundo a qual pessoas que contraem varíola morrem da doença e por $\mu(t)$ a taxa de morte por outras causas. Então, dx/dt representa a taxa segundo a qual o número de indivíduos suscetíveis varia e é dada por

$$\frac{dx}{dt} = -\big(\beta + \mu(t)\big)x. \tag{1}$$

Temos também:

$$\frac{dn}{dt} = -\nu\beta x - \mu(t)n, \tag{2}$$

onde dn/dt é a taxa de mortalidade do conjunto inteiro, e os dois termos à direita do sinal de igualdade são as taxas de mortalidade em consequência da varíola e de outras causas, respectivamente.

De forma a reduzir a complexidade do problema apresentado pelas equações (1) e (2), propõe-se uma substituição de variável: $z = x/n$. Assim, ao derivar z em relação à t e agrupando as equações (1) e (2), obtemos o seguinte problema de valor inicial (sem a dependência de $\mu(t)$):

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z(1 - \nu z). \tag{3}$$

Para a condição inicial, sabe-se que $n(t)$ é o número de pessoas que sobreviveram no ano, portanto, temos que $n(0)$ é o número de pessoas da população analisadas. Também sabe-se que $x(t)$ é o número de pessoas suscetíveis à varíola no tempo t, logo $x(0)$ também é o número total de pessoas da população. Assim a condição inicial encontrada é:

$$z(t) = \frac{x(t)}{n(t)} \Rightarrow z(0) = \frac{x(0)}{n(0)} \Rightarrow z(0) = 1. \tag{4}$$

O problema composto pelas equações (3) e (4) pode ser resolvido através da Transformada de Laplace. Entretanto, pode-se observar que o problema acima trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) não-linear, oque inviabilizaria a resolução via Transformada de Laplace, visto que a transformada trata-se de um operador linear. Para que sua solução seja possível através deste método, é necessário, assim como no trabalho de Moura (2018), que façamos uma substituição nas equações (3) e (4). Esta substituição é a mesma utilizada para uma equação do tipo Bernoulli, ou seja $u(t) = z(t)^{1-n}$, onde n é o índice do expoente a ser linearizado (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020), neste caso, $n = 2$. Assim, fazendo a substituição, encontramos a seguinte equação linearizada:

$$u'(t) - \beta u(t) = -\beta\nu. \tag{5}$$

Finalmente, com a EDO linearizada, podemos aplicar a Transformada de Laplace a cada um dos termos da equação (5). É importante destacar que a substituição também implica em uma mudança na condição do problema de valor inicial, que se torna $u(0) = 1$. Assim, aplicando a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} - \beta\mathcal{L}\{u(t)\} = -\beta\nu\mathcal{L}\{1\} \qquad \Rightarrow U(s) = \frac{-\beta\nu + s}{s(s-\beta)}. \tag{6}$$

Por fim, aplicando a Transformada Inversa de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\beta\nu+s}{s(s-\beta)}\right\} \quad \Rightarrow u(t) = \nu\left(1-e^{\beta t}\right) + e^{\beta t}. \tag{7}$$

Que voltando para a variável inicial resulta:

$$z(t) = \frac{x(t)}{n(t)} = \frac{1}{\nu+(1-\nu)e^{\beta t}}. \tag{8}$$

Assim, a equação (8) é a solução para o problema de Bernoulli que queríamos encontrar. Esta equação representa, portanto, a proporção de indivíduos em determinado instante de tempo, que ainda não contraíram a varíola.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

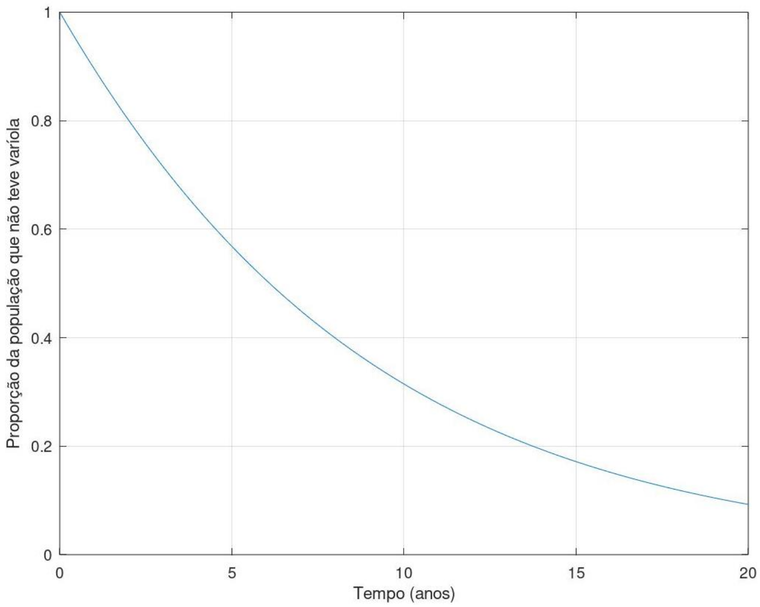
Alguns resultados podem ser obtidos a partir da equação (8). Um dado interessante que pode ser encontrado é a proporção de indivíduos com 20 anos que ainda não contraíram a varíola, uma vez que o próprio Bernoulli estimou que $\nu = \beta = 1/8$ (BERNOULLI, 1760,2004; BOYCE, DIPRIMA, MEADE, 2020). Assim:

$$z(t) = \frac{1}{1/8+(1-1/8)e^{1/8\cdot 20}} \Rightarrow z(t) = 0{,}09272\ldots\,. \tag{9}$$

Dessa forma, apenas 9,27 % dos indivíduos com menos de 20 anos ainda não haviam contraído a varíola naquele determinado ano. Este dado reafirma a alta taxa de infecciosidade da doença.

Ainda, através do *software* Octave, foi possível a obtenção do gráfico da solução do problema de Bernoulli, dada pela equação (8). O gráfico pode ser observado abaixo, na Figura 1:

Figura 1: Gráfico da solução do problema de Bernoulli



Para este gráfico, foram utilizados os mesmos parâmetros estimados por Bernoulli, que foram usados acima. Dessa forma, é possível observar que ao nascer, ou seja, no tempo $t = 0$, todo o conjunto da população ainda não teve contato com a varíola. Neste caso, o número 1, onde se dá início ao gráfico, representa o todo da população, ou seja, 100%. Conforme os anos vão passando, ou seja, conforme t aumenta, a proporção da população que ainda não teve contato com a varíola diminui, uma vez que a taxa de contágio da doença é bastante alta e muitos adquirem a doença, vindo ou não a falecer.

Também é possível observar que na Figura 1 o tempo foi limitado em $t = 20$ anos, assim como na estimativa acima. Este critério se deu pelo fato de que, quanto mais aumentarmos o tempo, mais próxima de zero será a proporção de pessoas que ainda não foram infectadas.

4. CONCLUSÕES

Tendo em vista os aspectos observados e a ideia principal do artigo, que era conhecer um pouco mais sobre os estudos de Daniel Bernoulli em relação à epidemiologia matemática, resolvendo uma de suas equações através da Transformada de Laplace, foi possível constatar que as equações propostas em 1760 foram de extrema importância, uma vez que foram responsáveis por analisar a situação epidêmica e influenciar nas políticas públicas, incentivando o programa de inoculação, que era tão debatido na época. A resolução da EDO através da Transformada de Laplace fez com que os cálculos fossem facilitados, visto que a transformada tem o papel de reduzir a um problema mais simples, cuja solução é obtida de uma forma mais fácil quando comparado com o problema original.

Os resultados obtidos através do gráfico da solução vão de acordo com o esperado, pois eles representam muito bem o processo epidêmico descrito por Bernoulli em seu trabalho. Inclusive, este comportamento pode ser observado em outras epidemias, quando ainda não existe um controle sobre a doença.

Por fim, é importante destacar a importância da interdisciplinaridade para trabalhos em modelagem matemática e o potencial que trabalhos neste sentido representam. O próprio trabalho de Bernoulli é um exemplo disso.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernoulli, D.: **Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.** *Hist. Acad. R. Sci. Paris*, p. 1–45, 1760/1766. English translation: *Rev. Med. Virol.* v.14, p. 275–288, 2004.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C.; FENG, Z. **Mathematical Models in Epidemiology**: texts in applied mathematics. New York: Springer, 2019. 619 p.

FIORAVANTI, C. Para prever os rumos das epidemias. **Revista Pesquisa Fapesp**. Edição 292. jun. 2020. Disponível em: < https://revistapesquisa.fapesp.br/modelagem-epidemiologica-ganha-visibilidade/ >. Acesso em: 24. Jun. 2021.

MOURA, E. A. **O uso da Transformada de Laplace na resolução de problemas.** Macapá: UNIFAP, 2018. Monografia, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2018.

OLIVEIRA, J. Q. Por que a matemática interessa à biologia? **Revista helius**. Sobral. Ano 3. v. 3. n. 2. p. 113-137. Julho/Dezembro 2020.