ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

IAGO HENRIQUE TEIXEIRA MARCOLINO[1];
LESLIE D. PÉREZ-FERNÁNDEZ[2], CAMILA PINTO DA COSTA[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – iago.mat@hotmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[3] Universidade Federal de Pelotas – camila.costa@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A transformada de Laplace (ver, por exemplo, SCHIFF, 1999) é um operador matemático cuja principal finalidade é facilitar a aplicação de métodos de resolução de equações diferenciais. Em particular, a transformada de Laplace converte equações diferenciais ordinárias (EDOs) em equações algébricas e equações em derivadas parciais (EDPs) em EDOs. Assim, muitas vezes ela é ferramenta fundamental para aplicação em problemas que modelam uma situação real apresentada matematicamente através de equações diferenciais. Por exemplo, COSTA et al. (2019) empregaram a transformada de Laplace em combinação com homogeneização assintótica para acelerar obtenção de estimativas da distribuição ao nível do solo de poluentes dispersos na atmosfera.

Este trabalho resume o estudo introdutório da teoria da transformada de Laplace e sua aplicação na resolução de equações diferenciais. Assim, na Metodologia serão apresentadas as principais definições e teoremas necessários para que se possa compreender de maneira geral o que é e até onde se estende este estudo da Transformada de Laplace. Nos Resultados e Discussões apresentará a tabela de pares de funções e suas transformadas de Laplace, bem como um exemplo prático de aplicação. Nas conclusões faremos as considerações finais assim como os desafios e aprendizado obtido.

2. METODOLOGIA

Seguindo SCHIFF (1999), a Transformada de Laplace $F(s) = L\big(f(t)\big)$ de uma função $f(t)$ é definida pela seguinte integral imprópria de segunda espécie:

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st} f(t)dt$$

sempre que o limite existir.

O seguinte teorema torna possível aplicar a transformada de Laplace em funções contínuas por partes.

Teorema 1.11. Se f é continua por partes em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial α, então a transformada de Laplace $L(f(t))$ existe para $F(s) > \alpha$, e converge absolutamente.

A propriedade da linearidade é útil em muitos casos que necessita calcular a transformada de Laplace separando uma função complicada por outra mais simples através de uma soma ou diferença de funções.

Linearidade

Se $f_1 \in L$ para $F(s) > \alpha$, $f_2 \in L$ para $F(s) > \beta$, então $f_1 + f_2 \in L$ para $F(s) >$ máximo $\{\alpha, \beta\}$, e

$$L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2)$$

para constantes arbitrarias c_1 e c_2. O mesmo vale para diferença.

É necessário também são só partir da função original para a transformada de Laplace como é de extrema necessidade fazer o caminho inverso, ou seja, através da transformada de Laplace encontrar a função que gerou aquela transformada.

Definição. Se $L\big(f(t)\big) = F(s)$, então o inverso da transformada de Laplace é denotado por

$$L^{-1}\big(F(s)\big) = f(t), \qquad t \geq 0,$$

Que leva a Transformada de Laplace para a função original.

Teorema 1.23. Funções continuas distintas em $[0, \infty)$ tem transformada de Laplace distintas.

Em muitas tentativas de solucionar uma transformada de Laplace assim como sua inversa nos deparamos com uma função exponencial multiplicando uma função já conhecida. O primeiro e o segundo teorema do deslocamento ajudam a simplificar o tipo de solução necessária.

Teorema 1.27 (primeiro teorema do deslocamento)

Se $F(s) = L(f(t))$, para $Re(s) > 0$, então

$$F(s-a) = L\big(e^{at} f(t)\big) \qquad (a\, real, e\; Re(s) > 0).$$

Teorema 1.31 (segundo teorema do deslocamento)

Se $F(s) = L(f(t))$, então

$$L\big(u_a f(t-a)\big) = e^{-as} F(s) \qquad (a \geq 0).$$

Decomposição de frações parciais

Em muitas aplicações da Transformada de Laplace é necessário encontrar o inverso de uma determinada transformada para que possamos encontrar a função que originou aquele problema, porém isso nem sempre é feito de forma imediata, sendo muitas vezes preciso decompor a $F(s)$ em frações parciais.

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

O seguinte teorema nos fornece os meios necessários para encontrar Transformadas de Laplace de derivadas de ordem *n*.

Teorema 2.12. Suponha que$f(t),\ f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ são continuas em $(0,\infty)$ e de ordem exponencial, enquanto $f^{(n-1)}(t)$ é continua por partes em $[0,\infty)$. Então

$$L\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n L(f(t)) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'^{(0^+)} - \cdots - f^{n-1}(0^+)$$

Com toda essa base ferramental podemos aplicar a transformada de Laplace em problemas matemáticos da vida real descritos em sua maioria por EDOs.

Procedimento Geral

O método de Transformada de Laplace para resolver EDOs pode ser resumido pelos seguintes passos.

i) Aplique a transformada de Laplace na EDO com incógnita y. Isso resulta no que é chamado de equação transformada.

ii) Obtenha a solução $L(y) = F(s)$ da equação transformada, onde $F(s)$ é uma expressão algébrica de variável s.

iii) Aplique a transformada de inversa para obter a solução $y = L^{-1}[F(s)]$.

As técnicas para determinar a transformada de Laplace são respaldadas pelas definições e teoremas que englobam convergência, funções periódicas, função continua por partes, função Gamma. Somado a técnicas de decomposição de frações parciais, Teorema do Deslocamento, Derivada e Teoremas Integrais, Convolução e Integração no Plano Complexo. Todas essas técnicas, exceto a última, são usadas em conjunto com a tabela padrão de Transformada de Laplace.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Tabela 1 a seguir mostra as transformadas de Laplace de algumas das funções mais utilizadas na matemática e possivelmente serão utilizadas para acelerar o processo de resolução de uma EDO, eliminando muitas vezes a necessidade de calcular a integral da transformada em funções já conhecidas.

Tabela 1. Pares de funções e suas transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s) = L(f(t))$	$f(t)$	$F(s) = L(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$sinh\, at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$cosh\, at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

Aplicação prática

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=1, \quad y(0)=y'(0)=0,$$

que representa uma situação da realidade, queremos descobrir qual a função que dá origem a este problema.

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação,

$$L(y''+y)=L(1) \Leftrightarrow L(y'')+L(y)=L(1)$$

Aplicando o teorema das derivadas e verificando as respectivas transformada na tabela 1, obtemos

$$s^2L(y)+L(y)=\frac{1}{s} \Leftrightarrow L(y)=\frac{1}{s(s^2+1)}$$

Decompondo $\frac{1}{s(s^2+1)}$ em frações parciais encontramos,

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}$$

Assim,

$$L(y)=\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}$$

Aplicando a transformada inversa em ambos os lados da equação conforme Tabela 1, obtemos a solução do problema de valor inicial:

$$y=1-\cos t$$

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos de forma bem resumida um estudo introdutório da teoria da transformada de Laplace e sua aplicação na resolução de equações diferenciais. Pretendemos dar continuidade a esta pesquisa de iniciação científica com o estudo de métodos numéricos de inversão da transformada de Laplace e sua aplicação na resolução de equações diferenciais nos casos em que a transformada inversa não está tabelada.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COSTA, C. P.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; J. BRAVO-CASTILLERO, J. Pollutant dispersion modeling via mathematical homogenization and integral transform-based multilayer methods. In: BACELAR LIMA SANTOS, L. et al. (eds.) **Towards Mathematics, Computers and Environment: A Disasters Perspective.** Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2019. Cap.4, p.59-82

SCHIFF, J. L. **The Laplace Transform: Theory and Applications**. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1999.