UM MODELO MATEMÁTICO PARA ESTUDO DE PROPAGAÇÃO DE CONTAMINANTES EM ATERROS SANITÁRIOS

JOSIANE KONRADT[1]; TAMIRES FONSECA DE ALMEIDA[2]; IGOR DA CUNHA FURTADO[3]; GUILHERME JAHNECKE WEYMAR[4]; DANIELA BUSKE[5]; RÉGIS SPEROTTO DE QUADROS[6]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – josianekonradt@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – tamiresfonsecadealmeida@hotmail.com*
[3]*Instituto Federal Sul-rio-grandense – igorjara@gmail.com*
[4]*Universidade Federal de Pelotas – guilhermejahnecke@gmail.com*
[5]*Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com*
[6]*Universidade Federal de Pelotas – quadros99@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

Os altos índices de poluição e a preocupação com o meio ambiente têm acarretado diversos debates na sociedade, em particular, à poluição dos corpos hídricos é um assunto que vem sendo bastante discutido ao longo dos anos. A contaminação de recursos hídricos por resíduos sólidos urbanos (RSU) ocorre quando são descartados no meio ambiente de forma incorreta, sem principais cuidados necessários, como em lixões a céu aberto ou aterros irregulares que podem causar sérios problemas ambientais e de saúde pública.

As consequências negativas da poluição que atingem o solo e o lençol freático influenciam na necessidade de um estudo para que esses recursos sejam ao máximo preservados, nesse sentido, a modelagem matemática, apresenta-se como uma importante ferramenta para o estudo da poluição oriunda dos contaminantes acumulados em um aterro sanitário.

O trabalho de ALBURQUERQUE (2018) apresenta um estudo sobre a propagação de contaminantes que estão presentes no solo, a partir do vazamento contínuo e uniforme de poluentes em uma célula de armazenamento de RSU num aterro sanitário. Neste trabalho foi utilizada a técnica da *Generalized Integrated Transform Technique* (GITT), para resolver o problema de transporte de contaminantes e o estudo visa obter parâmetros para serem utilizados na prevenção da contaminação do solo e do lençol freático sob um aterro sanitário.

No presente trabalho será desenvolvida a solução de um modelo matemático para simulação da dispersão de poluentes em aterros sanitários, que contribui para o controle ambiental da contaminação do solo e do lençol freático. Para resolução do modelo unidimensional transiente de transporte de massa num meio poroso saturado, utilizou-se o método *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) com o objetivo de obter a solução da forma analítica do problema (SILVEIRA, et al., 2020).

2. METODOLOGIA

O modelo utilizado neste trabalho pode ser observado através da Figura 1, que apresenta um esquema simplificado de uma célula de armazenamento de RSU, onde ocorre o transporte da concentração de contaminantes através do meio poroso e então chegando no lençol freático.

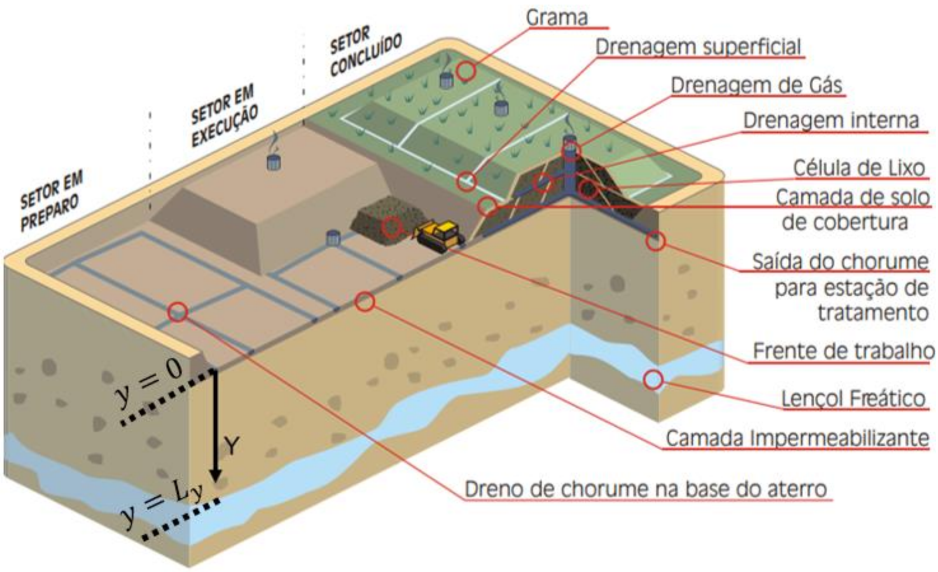

Figura 1 – Corte da seção de um aterro sanitário.

Fonte: Adaptado de CONDER, 2017.

A seguinte equação, escrita forma adimensional, descreve o transporte de poluentes no meio poroso saturado, podendo ser encontrada no trabalho de ALBUQUERQUE (2018):

$$R\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - Pe\frac{\partial C}{\partial y}, \tag{1}$$

onde R representa o fator de retardamento do solo, C é a concentração do contaminante na fase líquida, t equivale ao tempo, y representa a direção Y e Pe é o Número de Péclet.

A equação (1) está sujeita à condição de interface que corresponde ao vazamento contínuo e uniforme de chorume em uma célula de RSU. A condição inicial do problema é dada por $C(y,0) = C_0$, onde C_0 é a concentração inicial do contaminante na célula de armazenamento de RSU. Assim, as condições de contorno, na forma adimensional, são dadas por:

$$C(0,t) = 1, \qquad \frac{\partial C}{\partial y}(1,t) + BiC(1,t) = 0, \tag{2}$$

onde Bi é o Número de Biot.

Como a equação (2) possui uma condição de contorno não-homogênea na direção Y, será aplicado o seguinte filtro matemático para que a GILTT possa ser utilizada adequadamente:

$$C(y,t) = C^*(y,t) + C_F(y), \tag{3}$$

onde C^* é a transformada inversa e C_F é o filtro para o campo de concentração. Logo, substituindo a equação (3) na equação (1), temos:

$$R\frac{\partial C^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^2} + \frac{d^2 C_F}{dy^2} - Pe\left(\frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{dC_F}{dy}\right). \tag{4}$$

A partir da equação (4), temos duas equações diferencias, uma ordinária (EDO) e outra parcial (EDP). Dessa forma, a EDO e as condições de contorno são dadas pelas seguintes equações:

$$\frac{d^2C_F}{dy^2} - Pe\frac{dC_F}{dy} = 0, \qquad C_F(0) = 1, \quad \frac{dC_F(1)}{dy} + BiC_F(1) = 0. \tag{5}$$

A equação (5) possui uma solução geral já conhecida e após aplicar as condições de contorno obtemos:

$$C_F(y) = \frac{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bie^{Pey}}{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi}, \tag{6}$$

assim, a equação (6) é a solução para a EDO (5).

A EDP obtida da equação (4), e as suas condições de contorno e condição inicial são:

$$\begin{cases} R\dfrac{\partial C^*}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 C^*}{\partial y^2} - Pe\dfrac{\partial C^*}{\partial y} \\ C^*(0,t) = 0, \qquad \dfrac{\partial C^*}{\partial t}(1,t) + BiC^*(1,t) = 0, \qquad C^*(y,0) = C_0 - C_F(y). \end{cases} \tag{7}$$

Para obter a solução $C^*(y,t)$ da equação descrita acima, utiliza-se o método GILTT. Para isso, primeiramente, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \lambda^2\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad e \quad \frac{d\varphi(1)}{dy} + Bi\varphi(1) = 0, \tag{8}$$

sendo que a equação diferencial possui como solução as autofunções $\varphi_n(y) = sen(\lambda_n y)$, onde os autovalores são obtidos da expressão $\lambda_n ctg(\lambda_n) = -Bi$.

A seguir, a solução da EDP (7) é expandida como uma série em torno das autofunções:

$$C^*(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)\bar{C}_n(t), \tag{9}$$

onde $\bar{C}_n(t)$ são termos a serem determinados.

Substitui-se a expansão (9) na equação (7) e aplica-se o operador integral $\int_0^1 (\,.\,)\varphi_m(y)dy$ em ambos lados da equação, obtendo assim:

$$R\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \varphi_n(y)\,\varphi_m(y)\frac{\partial \bar{C}_n(t)}{\partial t}dy =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \varphi_n''(y)\varphi_m(y)\bar{C}_n(t)dy - Pe\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \varphi_n'(y)\varphi_m(y)\bar{C}_n(t)dy. \tag{10}$$

Definindo: $Y(t) = [\overline{C_n}(t)]$; $A = \{a_{m,n}\}$, onde $a_{m,n} = R\int_0^1 \varphi_n(y)\,\varphi_m(y)dy$; $B = \{b_{m,n}\}$, onde, $b_{m,n} = -\lambda_n^2\int_0^1 \varphi_n(y)\,\varphi_m(y)dy - Pe\int_0^1 \varphi_n'(y)\varphi_m(y)dy$, ou ainda, sendo $F = -A^{-1}\cdot B$, reescreve-se a equação (10) da forma:

$$Y'(t) + F\cdot Y(t) = 0. \tag{11}$$

Em relação a condição inicial, temos que:

$$C^*(y,0) = C_0 - C_F(y). \tag{12}$$

Aplicando-se a expansão (9) e o operador integral $\int_0^1(.)\varphi_m(y)dy$ na condição inicial (12), obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \varphi_m(y)\,\varphi_n(y)\bar{C}_n(0)dy = \int_0^1 (C_0 - C_F(y))\,\varphi_m(y)dy, \tag{13}$$

escrevendo (13) na forma matricial: $Y(0) = R \cdot A^{-1} \cdot E,$ onde $e_m = \int_0^1 (C_0 - C_F(y))\varphi_m(y)dy$ e desta forma a condição inicial está bem definida.

A EDO matricial (11) é resolvida pela transformada de Laplace. Assumindo que a matriz F seja diagonalizável, temos que $F = X \cdot D \cdot X^{-1}$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de F, X é a matriz cujas colunas constituem os autovetores linearmente independentes de F e X^{-1} é sua inversa. Logo a solução da equação (11) é dada por:

$$Y(t) = X \cdot \mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot I + D)^{-1}, s \to t\} \cdot X^{-1} \cdot Y(0). \tag{14}$$

Utilizando as propriedades da transforma inversa de Laplace, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot I + D)^{-1}, s \to t\} = \begin{pmatrix} e^{-d_0 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-d_N t} \end{pmatrix} = G(t). \tag{15}$$

Portanto, com a matriz $G(t)$ definida em (15), conclui-se que a solução da EDO matricial (11) é: $Y(t) = X \cdot G(t) \cdot X^{-1} \cdot Y(0)$. Logo, a solução do modelo unidimensional da dispersão de poluentes em meios porosos, está bem definida, uma vez que $C^*(y,t)$ e $C_F(y)$ são funções conhecidas (equações (9) e (6), respectivamente).

3. CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi exibida a solução de um modelo matemático que rege problemas de transporte de poluente num meio poroso saturado em aterros sanitários. Para continuação do estudo, pretendemos realizar a implementação computacional da solução encontrada e comparar os dados obtidos com os disponíveis na literatura.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, F. A. **Estudo da propagação de contaminantes em aterros sanitários via GITT**. 2018. Tese (Doutorado em Ciências Ambientais) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba.

BAHIA. **Manual de Operação de Aterros Sanitários**. Companhia de Desenvolvimento Urbano do Estado da Bahia – CONDER. 2017. Acessado em 04 ago. 2021. Online. Disponível em: https://cooperativadereciclagem.files.wordpress.com/2010/06/manual_aterro_sanitario.pdf.

SILVEIRA, V. C.; BUSKE, D.; QUADROS, R. S.. Simulation of three-dimensional transient pollutant dispersion in low wind conditions using the 3D-GILTT technique. **Revista Mundi, Engenharia e Gestão**, Paranaguá, v.5, n.6, p.1 – 13, 2020.