HOMOGENEIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

ELISIANE COGOY DA SILVA[1]; LESLIE D. PÉREZ-FERNÁNDEZ[2]
[1]Universidade Federal de Pelotas – elisics@hotmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas –leslie.fernandez@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos uma metodologia para a resolução de um problema de valores iniciais e de contorno (PVIC) para uma equação de onda não homogênea com coeficiente rapidamente oscilante. Estudar esses tipos de problemas é relevante para possíveis aplicações em controle de vibrações mecânicas, colheita de energia, propagação de ondas eletromagnéticas entre outros. A metodologia consiste da combinação do método de homogeneização assintótica (MHA - BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) e a transformada de Laplace. O MHA baseia-se no desenvolvimento assintótico em duas escalas da solução do problema. Tal desenvolvimento assintótico é uma série de potências do parâmetro pequeno ϵ que caracteriza a separação das duas escalas e o comportamento rapidamente oscilante na equação, e cujos coeficientes são funções incógnitas que dependem das duas escalas. Assim, o problema é desacoplado em uma sequência recorrente de problemas para obter cada uma das funções incógnitas que formam os coeficientes da série assintótica da solução procurada. Na prática é usual considerar somente os dois primeiros termos da série assintótica, obtendo-se o problema homogeneizado para o primeiro termo e o problema local para o segundo, respectivamente. Neste trabalho o problema homogeneizado é resolvido aplicando a transformada de Laplace, cuja inversão é feita numericamente pelo método de Talbot fixo (ABATE; VALKÓ, 2004).

2. METODOLOGIA

A metodologia consiste em aplicar o MHA no seguinte PVIC para uma equação de onda não homogênea com termo fonte $f(x,t)$ e coeficiente $E\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ positivo, limitado, diferenciável e ϵ-periódico:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(E\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial x}\right) = f(x,t), x \in (0,1), \qquad t > 0. \\ u^\epsilon(0,t) = u^\epsilon(1,t) = 0, t > 0,\ u^\epsilon(x,0) = \dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(x,0) = 0,\ \ x \in (0,1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Procura-se uma aproximação da solução u^ϵ do PVIC (2.1), como uma solução assintótica formal $u^{(2)}$ da forma

$$u^{(2)}(x,t,\epsilon) = u_0(x,y,t) + \epsilon\, u_1(x,y,t) + \epsilon^2(x,y,t), \qquad y = \frac{x}{\epsilon}, \tag{2.2}$$

Sendo $u_i, i = 0, 1, 2$, funções 1-periódicas em y. Substituindo (2.2) em (2.1), temos

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right) - f(x,t) = O(\epsilon), \tag{2.3}$$

Em que $O(\epsilon)$ representa o erro ao tomar $u^{(2)}$ como aproximação da solução u^{ϵ} do PVIC (2.1). Com efeito, expandindo $u^{(2)}$ em (2.3), temos

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial u_1}{\partial t}+\epsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(E\,(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\epsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}+\epsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right)-f(x,t)=O(\epsilon)\quad(2.4)$$

Para expandir (2.4), se aplica a regra da cadeia $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y}$ no segundo termo, pois $y=\frac{x}{\epsilon}$. Logo, agrupando em potências de ϵ a expansão de (2.4) temos

$$\epsilon^{-2}L_{yy}u_0+\epsilon^{-1}\left(L_{xy}u_0+L_{yx}u_0+L_{yy}u_1\right)$$

$$+\epsilon^0\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\left(L_{xx}u_0+L_{xy}u_1+L_{yx}u_1+L_{yy}u_2\right)-f(x,t)\right)=O(\epsilon),\qquad(2.5)$$

Em que $L_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(E(y)\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$, $\alpha,\beta\in\{x,y\}$, e $O(\epsilon)$ reúne todos os termos que tendem a zero quando $\epsilon\to 0^+$.

Note que o lado direito de (2.5) tende a zero quando $\epsilon\to 0^+$, enquanto o lado esquerdo não. Portanto, para a igualdade em (2.5) ser satisfeita, os termos do lado esquerdo precisam ser nulos. Especificamente, para que (2.5) seja cumprida, é necessário encontrar $u_0, u_1,\ u_2$ 1-periódicas em y tais que os coeficientes das potências de ϵ no lado esquerdo de (2.5) sejam nulos. Assim, obtém-se a recorrência de equações

$$\begin{aligned} L_{yy}u_0&=0,\\ L_{yy}u_1&=-L_{xy}u_0-L_{yx}u_0,\\ L_{yy}u_2&=\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\left(L_{xx}u_0+L_{xy}u_1+L_{yx}u_1\right)-f(x,t),\end{aligned}$$

que são completadas com as condições adequadas que resultam de substituir a assintótica $u^{(2)}$ nas condições iniciais e de contorno do problema original. Note que as equações na recorrência são da forma $LN=F$ em que $L=\ L_{yy}$ e $N=u_k$. Garante-se a existência e a unicidade das funções u_k soluções 1-periódicas em y mediante o seguinte lema.

Lema: Sejam $F(y)$ e $E(y)>0$ funções diferenciáveis e 1-periódicas. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica N da equação $LN=F$ é que $\langle F(y)\rangle\equiv\int_0^1 F(y)dy=0$, onde $\langle . \rangle$ denota a média integral. Ainda mais, tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y)=\widetilde{N}(y)+C$, onde $\widetilde{N}$ é uma solução 1-periódica de $LN=F$ tal que $\widetilde{N}(0)=0$ e C é uma constante arbitrária (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Assim, de aplicar o lema na recorrência de problemas para $u_0, u_1,\ u_2$ se obtém, respectivamente, que $u_0(x,y,t)=u_0(x,t)$ (u_0 não depende de y), que $u_1(x,y,t)=N_1\,(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}$ em que $N_1(y)$ é a solução do problema local

$$\frac{d}{dy}\left(E(y)\frac{dN_1}{dy}\right)=-\frac{dE}{dy},\qquad N_1(0)=0,$$

E que u_0 é a solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \hat{E}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in (0,1), \quad t > 0. \\ u_0(0,t) = u_0(1,t) = 0, & t > 0, \\ u_0(x,0) = 0, \dfrac{\partial u_0}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in (0,1) \end{cases} \tag{2.6}$$

em que $\hat{E} = \langle E^{-1}(y)\rangle^{-1}$ é o chamado coeficiente efetivo.

Pode-se provar que $\|u^\epsilon - u_0\| = O(\epsilon)$, ou seja, que a solução do problema homogeneizado (2.6) é uma boa aproximação da solução do problema original (2.1) para $\epsilon \to 0^+$(LIMA, 2016).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicando a Transformada de Laplace na equação da onda homogeneizada (2.6) e considerando $f(x,t) = e^{-t}$, com coeficiente $E\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$, de maneira que $\hat{\mathrm{E}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, e sujeita às condições de contorno e iniciais homogêneas com $L\{u_0(x,t)\} = U(x,s)$ sendo s a variável de Laplace, resolvendo e substituindo em (2.6) obtemos a solução do problema homogeneizado:

$$U(x,s) = \frac{senh\frac{s}{\sqrt{\hat{\mathrm{E}}}} + senh\frac{s(x-1)}{\sqrt{\hat{\mathrm{E}}}} - senh\frac{sx}{\sqrt{\hat{\mathrm{E}}}}}{s^2(s+1)senh\frac{s}{\sqrt{\hat{\mathrm{E}}}}} \tag{3.1}$$

Finalmente, a solução do problema homogeneizado (2.6) com $f(x,t) = e^{-t}$ e $\hat{\mathrm{E}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ é obtida através da aplicação da Transformada inversa de Laplace a (3.1). Neste caso, a complexidade de (3.1) impede a aplicação direta da Transformada inversa de Laplace. Assim, é necessária a abordagem alternativa da inversão numérica. Neste trabalho, é utilizado o algoritmo de inversão de Talbot Fixo definido por

$$u_0(x,t) = \frac{r}{M}\left\{\frac{1}{2}U(x,r)e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} Re\left[e^{ts(\theta_k)}U\big(x,s(\theta_k)\big)\big(1+i\sigma(\theta_k)\big)\right]\right\} \tag{3.2}$$

em que os parâmetros são $r = \frac{2M}{N_1 t}$, $s(\theta) = r\theta(cot\theta + i)$, $-\pi < \theta < \pi$, $i = \sqrt{-1}$, $\theta_k = \frac{k\pi}{M}$,$\sigma(\theta) = \theta + (\theta cot\theta - 1)cot\theta$(ABATE; VALKÓ, 2004).

A Figura 1, obtida com $N_t = 9, e\ M = 25$ para $0 < t \leq 2.11$, $M = 60$ para $2.11 < t \leq 6, M = 100$ para $t > 6$, apresenta: (a) a solução do problema homogeneizado (2.12) com $f(x,t) = e^{-t}$e $\hat{\mathrm{E}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ obtida de aplicar (3.2) a (3.1), (b) os perfis das temporais da solução do problema homogeneizado em (a) para $x \in \{0.3, 0.4, 0.5\}$, e (c) os perfis espaciais da solução do problema homogeneizado em (a) para $t \in \{1, 1.5, 2\}$.

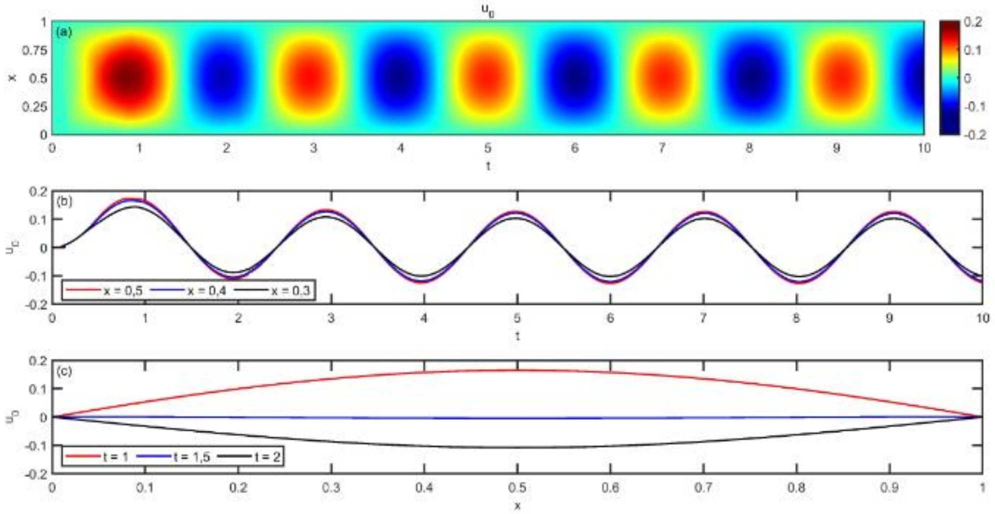

Figura 1. (a) Solução u_0 do problema homogeneizado (2.6) com $f(x,t) = e^{-t}$e $\hat{E} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ obtida de aplicar (3.2) a (3.1), (b) os perfis temporais da solução u_0 do problema homogeneizado, (c) os perfis espaciais da solução u_0 do problema homogeneizado.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada a aplicação do MHA a um PVIC para uma equação de onda não homogênea com coeficiente rapidamente oscilante. O problema homogeneizado resultante foi resolvido aplicando o método Talbot fixo de inversão numérica da transformada de Laplace à solução do PVC obtido de aplicar a transformada de Laplace ao problema homogeneizado.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABATE, J.; VALKÓ, P.P. Multi-precision Laplace transform inversion.**International Journal for Numerical Methods in Engineering**,v.60, n.5, p.979-993, 2004

BAKHVALOV, N.S. PANASENKO, G.P. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media.**Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

LIMA, M.P. **Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica**. 2016. 141f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas