Equações da Magnetohidrodinâmica

Luis Felipe E. Maescki[1]; Joel Pavan[2]

[1UFPel] – *hussdlest@gmail.com*

[2UFPel] – *joel.pavan@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho trataremos das Equações da Magnetohidrodinâmica (MHD), que é uma abordagem da Física dos Plasmas.

O objetivo é estabelecer os fundamentos da Teoria de Fluidos e das Equações da Magnetohidrodinâmica (MHD), com vistas a futuras simulações numéricas, obtendo as equações que descrevem um plasma como um fluido eletricamente carregado, a partir das quais podem ser obtidos subconjuntos de equações que descrevem sistemas particulares.

2. METODOLOGIA

Para deste desenvolvimento do trabalho, foram consultados e explicitados os resultados apresentados em J.A.Bittencourt (2004) e Francis F. Chen (2016).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Desenvolvimento

Como ponto de partida, se considera o processo de média sobre a equação de Boltzmann, como desenvolvido em J.A.Bittencourt (2004),

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{coll} \tag{1}$$

$$\int_v \chi \, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \, d^3v \; + \int_v \chi \, \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha \, d^3v + \int_v \chi \, \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha \, d^3v = \int_v \chi \, \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{coll} \, d^3v \tag{2}$$

onde a média da quantidade arbitrária χ é definida por:

$$< \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \; f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \tag{3}$$

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \tag{4}$$

Diferentes valores de χ definem os **momentos** de f_α (juntamente com n_α),

$$\mathbf{u}_{\alpha i}(\mathbf{r},t) =< v_i >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)} \int_v v_i \, f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3 v \qquad (5)$$

$$\Pi_{\alpha ij}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i \, v_j >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i \, v_j \, f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3 v \qquad (6)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i \, v_j \, v_k >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i \, v_j \, v_k \, f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3 v \qquad (7)$$

A velocidade pode ser separada em uma componente média e uma componente randômica,

$$\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha \qquad (8)$$

Dessa forma, os momentos podem ser reescritos como:

$$\Pi_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{v} \, \mathbf{v} >_\alpha = \rho_{m\alpha} \, \mathbf{u}_\alpha \, \mathbf{u}_\alpha + \mathcal{P}_\alpha \qquad (9)$$

$$\mathcal{E}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{v} \, \mathbf{v} \, \mathbf{v} >_\alpha = \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha) + \mathcal{Q}_\alpha \qquad (10)$$

Onde

$$\mathcal{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{c}_\alpha \, \mathbf{c}_\alpha > \qquad (11)$$

$$\mathcal{Q}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha > \qquad (12)$$

Adicionalmente, as quantidades Q_α e $\mathbf{q}_\alpha$ estão relacionadas,

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} < c_\alpha^2 \, \mathbf{c}_\alpha > \qquad (13)$$

$$q_{\alpha n} = \mathbf{q}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} < c_\alpha^2 \, \mathbf{c}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{n}} > \qquad (14)$$

$$q_{\alpha n} = \frac{1}{2} (\mathcal{Q}_{\alpha xxn} + \mathcal{Q}_{\alpha yyn} + \mathcal{Q}_{\alpha zzn}) \qquad (15)$$

O processo de média realizado sobre a equação inicial produz uma **hierarquia de equações,**

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \qquad (16)$$

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha \right] + \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha - n_\alpha < \mathbf{F} >_\alpha = \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \qquad (17)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{3p_\alpha}{2}\right)+\frac{3p_\alpha}{2}\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha\ +\ (\mathcal{P}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\mathbf{u}_\alpha+\nabla\cdot\mathbf{q}_\alpha=M_\alpha-\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{A}_\alpha+\frac{1}{2}u_\alpha^2S_\alpha \tag{18}$$

Para sistemas eletricamente carregados, em que as forças $\mathbf{F}$ são de origem eletromagnética,

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{19}$$

O sistema de **equações acopladas** deve incluir as **Equações de Maxwell** (com $\rho_\alpha=n_\alpha q_\alpha$ e $\mathbf{J}_\alpha=\rho_\alpha\mathbf{u}_\alpha$),

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad\qquad\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\qquad\qquad\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{20}$$

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho estabelece o conjunto de equações necessárias para o estudo da dinâmica de fluidos eletricamente carregados (plasmas).

O desenvolvimento da teoria resulta em uma hierarquia de equações acopladas, que precisam ser tratadas dentro de um modelo específico que produza o fechamento do sistema de equações.

Os resultados obtidos permitem o futuro desenvolvimento do trabalho na forma de simulações numéricas do sistema de equações.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BITTENCOURT, J.A. **Fundamentals of Plasma Physics.** Springer-Ver1ag, New York, 2004

CHEN, Francis F. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion** Springer International Publishing, Switzerland, 2016

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo incentivo da pesquisa no Brasil e em especial deste trabalho.