

## MODELO UNIDIMENSIONAL E TRANSIENTE PARA A TRANSFÊRENCIA DE CALOR EM UM SILO COM ARROZ: UMA ABORDAGEM PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

PÉTRA THALÍA DE TONI<sup>1</sup>; ANDRÉ RICKES<sup>2</sup>; IGOR DA CUNHA FURTADO<sup>3</sup>;  
GUILHERME JAHNECKE WEYMAR<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – [petra.toni157@gmail.com](mailto:petra.toni157@gmail.com)

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – [andre.rickes@hotmail.com](mailto:andre.rickes@hotmail.com)

<sup>3</sup>Instituto Federal Sul-rio-grandense (IFSul) - [igorjara@gmail.com](mailto:igorjara@gmail.com)

<sup>4</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – [guilhermejahnecke@gmail.com](mailto:guilhermejahnecke@gmail.com)

### 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o agronegócio no Brasil vem se destacando no comércio internacional, principalmente com a exportação de produtos agrícolas e, em especial, com a produção de grãos. O lucro nacional conquistado pelo agronegócio gerou 26,6% do PIB do Brasil no ano de 2020, segundo a Confederação da Agricultura e Pecuária do Brasil (CNA; CEPEA, 2021). Esta conquista deve-se, em parte, ao aumento de 75% no setor primário da base agrícola quando comparado à constituição desse setor no PIB de 2019.

Esse crescimento tem como um grande obstáculo o armazenamento a longo prazo e a baixa capacidade de estocagem dos grãos. O setor de armazenamento é responsável por grande parte da perda da qualidade e quantidade final do produto devido à vários fatores, como agentes patogênicos e mudanças físicas e químicas que podem deteriorar o grão (ARAUJO et al., 2017). Visto isso, surge a necessidade do estudo de métodos que melhorem a qualidade do armazenamento de grãos. Nesse ponto, a modelagem matemática vem desenvolvendo um papel importante na previsão da umidade e distribuição de temperatura, sendo esses dois os principais fatores de degradação de grãos dentro de um silo (SENAR, 2018).

Nesse sentido, o objetivo do presente trabalho será o de apresentar um modelo unidimensional em coordenadas cilíndricas, na direção vertical, e dependente do tempo para a transferência de calor dentro de um silo cilíndrico, para comparar com os dados experimentais (STARK, 2018). Além disso, será encontrada a solução deste modelo utilizando a forma implícita do Método das Diferenças Finitas (MDF), que será implementada em *software* computacional e comparada com dados experimentais de transferência de calor em silos, com o objetivo de validação da metodologia utilizada.

### 2. METODOLOGIA

O modelo utilizado no presente trabalho baseia-se no princípio da conservação de energia e nas hipóteses simplificadoras dadas em Santos (2020). Considerando o modelo unidimensional em coordenadas cilíndricas, na direção vertical, e transiente, o qual relaciona a temperatura interna com a altura da massa de grãos e com o tempo, tem-se a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < z < H_s, \quad t > 0, \quad (1)$$

onde  $T = T(z, t)$  é a temperatura dependente da altura interna  $z$  no instante  $t$ ,  $H_s$  é a altura máxima de grãos e  $\alpha$  é o coeficiente de difusividade térmica do grão.

Como condições de contorno, considera-se que a base e o topo do silo são isotérmicos, não havendo fluxo de calor, ou seja,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H_s} = 0. \quad (2)$$

E, para condição inicial, utiliza-se a função de perfil:

$$T(z, 0) = F(z) = C_0 e^{C_1 z + C_2} + C_3, \quad (3)$$

cujos coeficientes dependem do experimento analisado.

Para obter a solução desse modelo, será utilizada a forma implícita do MDF, que consiste na discretização do domínio do problema em um número finito de elementos, como ilustrado na Figura 1.

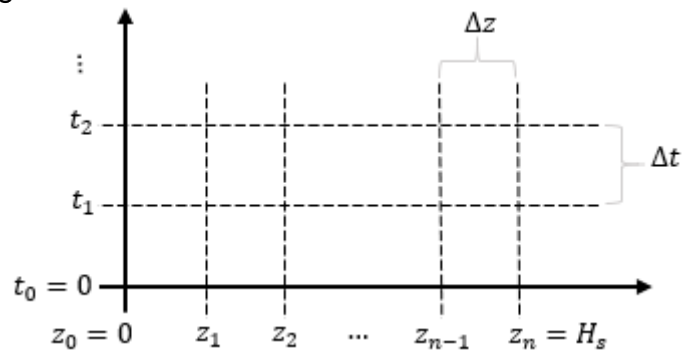


Figura 1. Discretização do domínio em uma malha de elementos de mesmas dimensões

Define-se as coordenadas  $z_i = i \cdot \Delta z$  e  $t_j = j \cdot \Delta t$ , para os índices  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots$ , onde  $\Delta z = H_s/n$ , sendo  $n$  o valor de subintervalos criados entre  $z_0$  e  $z_n$ , e  $\Delta t$  é a variação temporal suficientemente pequena.

Assim, em cada ponto  $(z_i, t_j)$ , aproxima-se a derivada parcial temporal de primeira ordem e a derivada parcial espacial de segunda ordem, presentes na equação (1), pelas respectivas equações (SMITH, 1985)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{(z_i, t_j)} = \frac{T(z_i, t_j) - T(z_i, t_{j-1})}{\Delta t}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{(z_i, t_j)} = \frac{T(z_{i+1}, t_j) - 2T(z_i, t_j) + T(z_{i-1}, t_j)}{\Delta z^2}, \quad (5)$$

Substituindo as equações (4) e (5) na equação (1) e reorganizando os termos obtidos, tem-se

$$T(z_i, t_{j+1}) = \lambda \cdot T(z_{i+1}, t_j) + (1 - 2\lambda) \cdot T(z_i, t_j) + \lambda \cdot T(z_{i-1}, t_j), \quad (6)$$

onde  $\lambda = -\alpha \Delta t / \Delta z^2$ .

Além disso, aproximando as condições de contorno da equação (2) pela fórmula da diferença atrasada, obtém-se, para cada  $j = 0, 1, \dots$ , que

$$T(z_{-1}, t_j) = T(z_0, t_j); \quad T(z_{n+1}, t_j) = T(z_n, t_j) \quad (7)$$

Fazendo  $i$  variar de 0 até  $n$  na equação (6) e utilizando as equações (7) obtém-se um sistema de equações lineares que pode ser escrito da forma matricial

$$u_{j+1} = A \cdot u_j, \quad (8)$$

onde

$$u_j = [T(z_0, t_j) \quad T(z_1, t_j) \quad \cdots \quad T(z_n, t_j)]^T, \quad (9)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda & & & & \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \\ & & & \lambda & 1-\lambda & \end{bmatrix}, \quad (10)$$

sendo  $A$  uma matriz esparsa, onde os espaços em branco representam zeros.

Por fim, nota-se que o termo inicial da iteração (8) é obtido através da condição inicial do problema, dado pela equação (3), e, portanto,

$$u_0 = [T(z_0, t_0) \quad T(z_1, t_0) \quad \cdots \quad T(z_n, t_0)]^T = [F(z_0) \quad F(z_1) \quad \cdots \quad F(z_n)]^T. \quad (11)$$

Para resolver o sistema matricial linear dado pela equação (8), utilizou-se o método de Eliminação de Gauss, que consiste na transformação da matriz  $A$  estendida em uma matriz triangular superior através de operações com linhas. A partir dessa simplificação, obtém-se o valor de cada incógnita através da substituição regressiva.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir da solução encontrada nas equações (8) e (11), foram realizadas simulações computacionais para validação do modelo utilizado. Os dados simulados foram comparados com dados experimentais fornecidos por Stark (2018), onde o autor mediu a temperatura dentro de um modelo de silo a cada meia hora durante 24 horas. Para a simulação, serão consideradas as temperaturas nos sensores 1 (na altura 0,01m) e 3 (na altura 0,56m) do cabo 1, utilizando-se os coeficientes experimentais dados na Tabela 1.

Coeficientes	$\alpha$	$H_s$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
Valores	$3,27 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$	0,65m	9,31188	-7,23951	0	22,6384

Tabela 1. Coeficientes calculados no experimento de Stark (2018)

A implementação computacional da solução encontrada foi realizada no *software Fortran PowerStation 4.0*, utilizando os valores  $n = 100$ ,  $\Delta z = 0,0065 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 17,28 \text{ s}$  e  $\lambda = -0,1337$  (também foram utilizados os valores  $\Delta z = 0,00325 \text{ m}$  e  $\Delta t = 8,64 \text{ s}$  e nenhuma mudança foi observada nos dados simulados, portanto, os valores adotados em  $\Delta z$  e  $\Delta t$  garantem a convergência e a estabilidade do método).

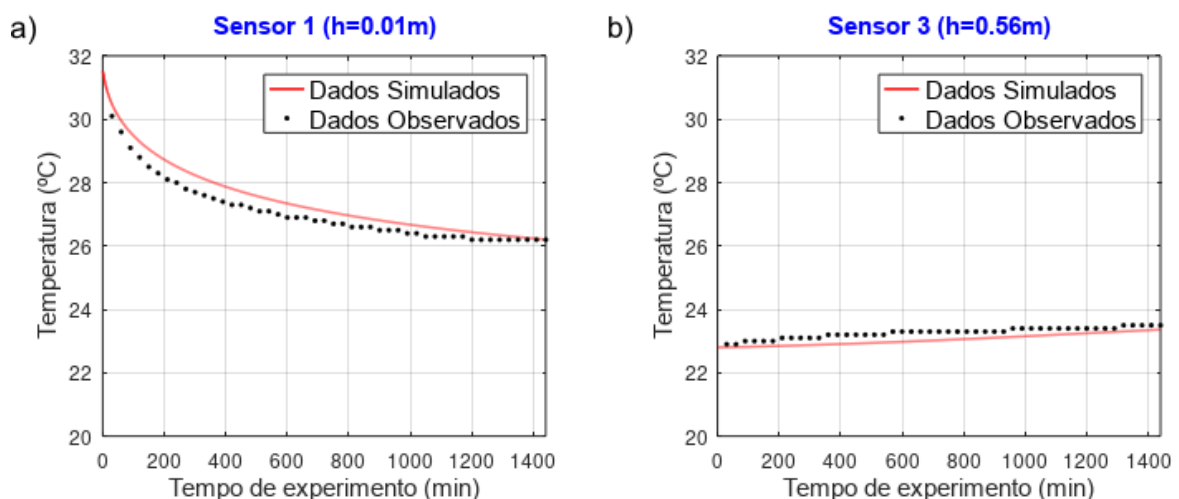


Figura 2. Dados simulados e dados observados no experimento de Stark (2018) para a temperatura no cabo 1 e a) sensor 1; b) sensor 3

Nota-se, por meio da figura 2, que os valores obtidos com a metodologia utilizada são próximos às temperaturas observadas, mostrando que o modelo analisado é eficaz para prever a transferência de calor que ocorre dentro de um silo. Além disso, é nítido que, fisicamente falando, no sensor 1 a temperatura decai, pois, essa camada de grãos possui, inicialmente, temperatura superior das demais camadas e, por consequência, transfere seu calor para a parte superior do silo. Nesse processo, a temperatura do sensor mais acima (sensor 3) aumenta com o passar do tempo.

Ainda, é nítido a influência das condições de contorno e inicial nas temperaturas simuladas, mostrando que a solução encontrada está de acordo com o modelo matemático utilizado. Nesse sentido, o modelo matemático adotado é eficaz para analisar a distribuição da temperatura ao longo da altura  $z$  em função do tempo  $t$ .

#### 4. CONCLUSÕES

No presente trabalho, concluiu-se que a metodologia utilizada mostra-se satisfatória para simular a transferência de calor dentro do silo cilíndrico em relação ao tempo, por estar condizente com dados experimentais e ser de fácil implementação computacional.

Como próximos passos da nossa pesquisa, pretendemos incluir o elemento umidade na metodologia utilizada, por ser uma variável importante no processo de armazenamento de grãos.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAUJO, M. M. V.; CANEPPELE, M. A. B.; TRAGE, A. K. Grãos de soja submetidos a diferentes condições de armazenamento. **Nativa**, Sinop, v.5, n.2, p.79-84, 2017.
- CNA; CEPEA. **PIB do Agronegócio: PIB do Agronegócio alcança participação de 26,6% no PIB brasileiro em 2020**. CNA, Brasília, 10 mar. 2021. Disponível em: [https://www.cnabrasil.org.br/assets/arquivos/boletins/sut.pib\\_dez\\_2020.9mar2021.pdf](https://www.cnabrasil.org.br/assets/arquivos/boletins/sut.pib_dez_2020.9mar2021.pdf). Acesso em: 9 jul. 2021.
- SANTOS, M. V. H. **Modelagem da transferência de calor entre as massas de grãos de arroz em um silo armazenador**. Dissertação (Mestrado em Ciências Ambientais) - Programa de Pós-Graduação em Ciências Ambientais, Universidade Federal de Pelotas, p. 95. 2020.
- SENAR. **Grãos: armazenamento de milho, soja, feijão e café**. (Coleção SENAR 216). Brasília: Senar, 2018.
- SMITH, G. D. **Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods**. 3. ed. New York: Oxford University Press, 1985.
- STARK, F. **Estudo do comportamento da temperatura de grãos armazenados em um silo através de um modelo matemático**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Agrícola) – Centro de Engenharias, Universidade Federal de Pelotas, p.50. 2018.