

## Análise de precisão e tempo de máquina de métodos numéricos de inversão da transformada de Laplace

CÁSSIO FEHLBERG LEMOS<sup>1</sup>; CAMILA PINTO DA COSTA<sup>2</sup>; LESLIE D. PÉREZ-FERNÁNDEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – cassiofehlberg@gmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – camila.costa@ufpel.edu.br

<sup>3</sup>Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

### 1. INTRODUÇÃO

A transformada de Laplace da função  $f(t)$ ,  $t > 0$ , é definida por  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ . Sua aplicação mais comum é participar da resolução de equações diferenciais. Especificamente, ela converte EDPs em EDOs e EDOs em equações algébricas. Assim, a solução da equação original é obtida aplicando a transformada de Laplace inversa  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)ds$  na solução da equação transformada (TONIDANDEL; DE ARAÚJO, 2012). Em geral, devido à complexidade da solução da equação transformada, não é possível aplicar diretamente a definição da inversão. Alternativamente, uma abordagem de inversão numérica da transformada de Laplace é utilizada. Na tabela a seguir, apresentamos os métodos numéricos utilizados neste trabalho. O objetivo é analisar a precisão e o tempo de máquina deles para algumas funções-teste.

Tabela 1. Métodos numéricos de inversão

| Método         | Fórmula  |
|----------------|--|
| Talbot Fixo    | $f(t, M) = \frac{r}{M} \left\{ \frac{1}{2} F(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} \left[ e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k)) \right] \right\}$<br>(ABATE; VALKÓ, 2004)               |
| Dubner-Abate   | $f(t, T) = \frac{2e^{at}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=1}^{NSUM} \operatorname{Re}\{F(\alpha)\} \cos(\theta) \right]$<br>(DUBNER; ABATE, 1968)  |
| Durbin         | $f(t, T) = \frac{e^{at}}{T} \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=0}^{NSUM} \operatorname{Re}\{F(\alpha)\} \cos(\theta) - \operatorname{Im}\{F(\alpha)\} \sin(\theta) \right]$<br>(DURBIN, 1974) |
| Gaver-Stehfest | $f(t, N) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i F\left(\frac{\ln 2}{t} i\right)$<br>(TOMASCHEWSKI, 2012)   |
| Euler          | $f(t, m) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} 2^{-m} s_{n+j}(t)$<br>(ABATE; WHITT, 1995)  |

### 2. METODOLOGIA

As funções-teste escolhidas são  $f(t) = \sin(t)$ ,  $f(t) = e^{-t}$  e  $f(t) = e^{-t}\sin(t)$ , que ocorrem comumente na solução de EDOs lineares. Os métodos da tabela 1 foram implementados no Scilab 6.0.2 (BAUDIN, 2011), e analisou-se a precisão e o tempo de máquina. Foi utilizado um processador Intel Core i5 8250U e 8 GB de memória RAM.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na figura 1 se apresentam os resultados das inversões numéricas para a função  $\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin(t)\}$ .

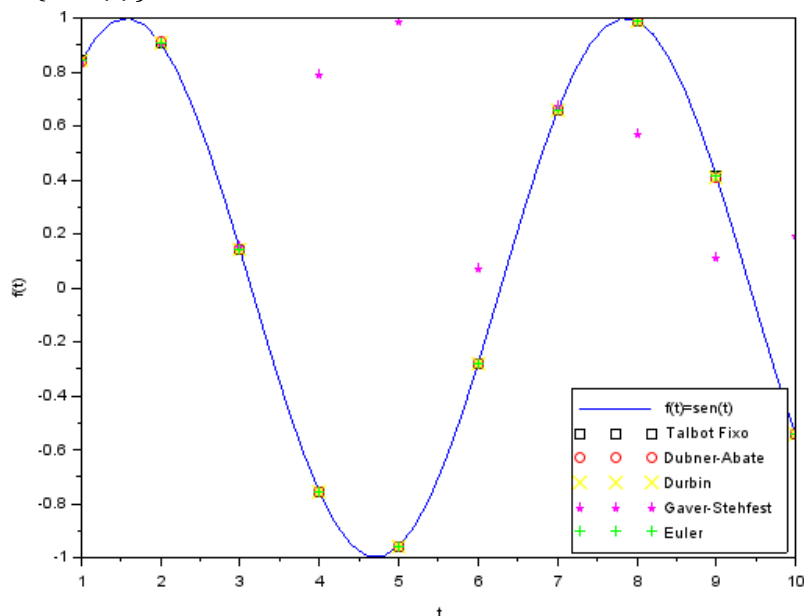


Figura 1. Comparação dos algoritmos na tabela 1 para  $f(t) = \sin(t)$

Foram encontrados resultados precisos (erro máximo absoluto da ordem de E-03, ver tabela 2) com Talbot Fixo, Dubner-Abate, Durbin e Euler. Gaver-Stehfest, apesar de começar com um resultado preciso para  $t = 1$ , ele vai perdendo sua precisão conforme  $t$  aumenta.

Na figura 2 se apresentam os resultados das inversões numéricas para a função  $\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$ .

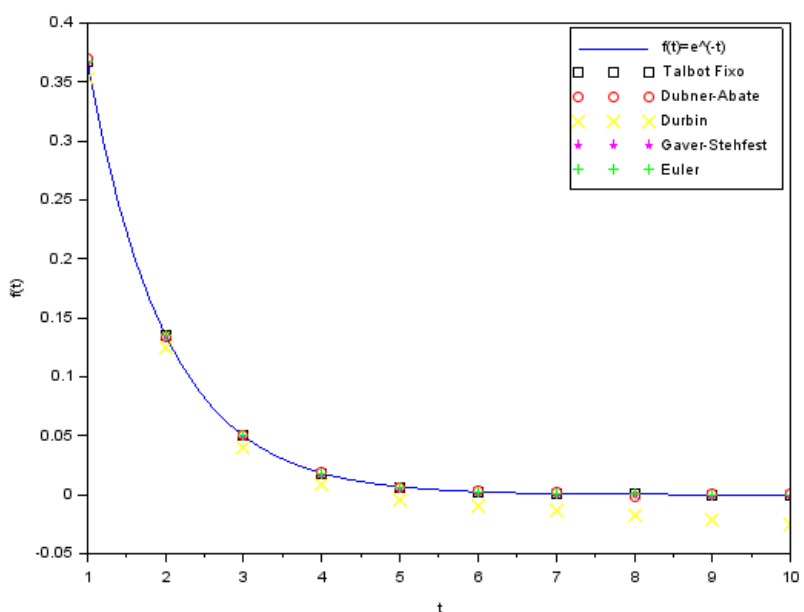


Figura 2. Comparação dos algoritmos na tabela 1 para  $f(t) = e^{-t}$

Os métodos Talbot Fixo, Dubner-Abate, Gaver-Stehfest e Euler exibem resultados precisos com  $f(t) = e^{-t}$ . Durbin apresentou resultados menos precisos, com exceção de  $t = 3$  e  $t = 4$ , onde os resultados tiveram uma maior precisão (ver tabela 2).

Na figura 3 se apresentam os resultados das inversões numéricas para a função  $\frac{1}{(s+1)^2+1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\sin(t)\}$ .

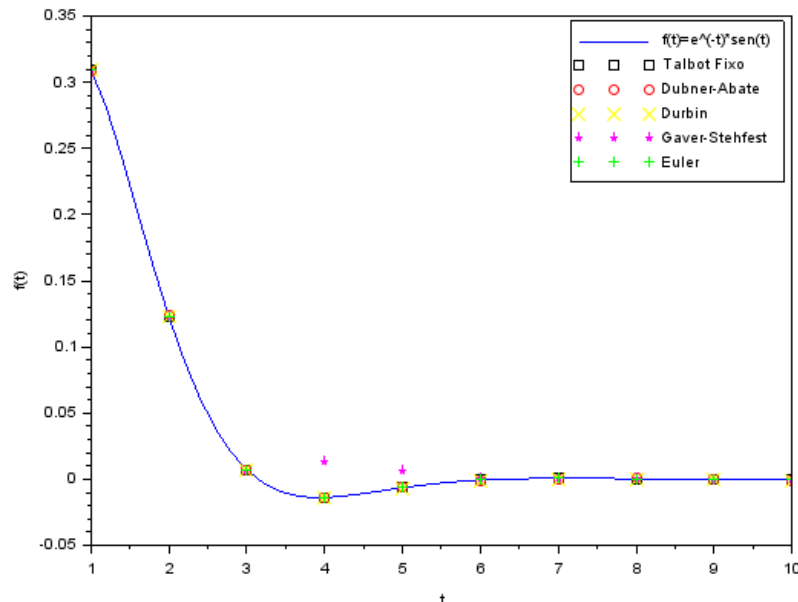


Figura 3. Comparação dos algoritmos na tabela 1 para  $f(t) = e^{-t}\sin(t)$

Com  $f(t) = e^{-t}\sin(t)$  foram obtidos resultados precisos com Talbot Fixo, Dubner-Abate, Durbin e Euler. Gaver-Stehfest tem uma queda na precisão em  $t = 4$ , e um leve aumento em  $t = 6$ . Nota-se que Gaver-Stehfest foi o único método numérico em que a função apresentou erros maiores, sendo que o mesmo apresentou resultados pouco precisos para  $\sin(t)$ , função a qual faz parte de  $e^{-t}\sin(t)$  (ver tabela 2).

Foi calculado em cada método numérico, para todas as funções e todos os valores  $t$ , o erro absoluto para uma melhor análise de resultados. Na tabela 2 podemos ver os erros máximos absolutos.

Tabela 2. Erro máximo absoluto dos algoritmos da tabela 1

| $f(t)$          | Talbot Fixo | Dubner-Abate | Durbin    | Gaver-Stehfest | Euler     |
|-----------------|-------------|--------------|-----------|----------------|-----------|
| $\sin(t)$       | 3,406E-11   | 1,61E-03     | 8,5E-04   | 4,17E-01       | 1,646E-08 |
| $e^{-t}$        | 4,41E-11    | 1,97E-03     | 2,52E-02  | 5,392E-06      | 3,448E-09 |
| $e^{-t}\sin(t)$ | 1,223E-11   | 1,588E-03    | 8,986E-04 | 2,768E-02      | 5,767E-09 |

Durante os testes foi monitorado o tempo de máquina. Os resultados podem ser observados na tabela 3.

Tabela 3. Tempo de máquina em segundos dos algoritmos da tabela 1

| $f(t)$          | Talbot Fixo | Dubner-Abate | Durbin | Gaver-Stehfest | Euler |
|-----------------|-------------|--------------|--------|----------------|-------|
| $\sin(t)$       | 0,036       | 0,031        | 0,039  | 0,201          | 0,053 |
| $e^{-t}$        | 0,038       | 0,021        | 0,034  | 0,204          | 0,052 |
| $e^{-t}\sin(t)$ | 0,036       | 0,021        | 0,039  | 0,209          | 0,052 |

#### 4. CONCLUSÕES

De todos os métodos numéricos de inversão estudados neste trabalho, Talbot Fixo foi o que apresentou maior precisão, exibindo os menores erros máximos para todas as funções testadas. Dubner-Abate foi o método numérico a processar mais rapidamente, levando um tempo de máquina médio de 0,024 segundos. Talbot Fixo e Durbin apresentaram tempo médio próximos a Dubner-Abate, sendo 0,036 segundos e 0,037 segundos respectivamente. Euler e Gaver-Stehfest levaram em média 0,052 segundos e 0,204 segundos respectivamente. Analisando os resultados obtidos é possível determinar que o Talbot Fixo é o melhor método numérico para trabalhar com as funções estudadas neste trabalho, pois além de apresentar uma maior precisão que os demais métodos, ele apresenta um tempo de máquina médio próximo do mais rápido.

#### AGRADECIMENTOS

Agradeço a FAPERGS pelo fomento à pesquisa.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABATE, J.; VALKÓ, P. P. Multi-precision Laplace transform inversion. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, Hoboken, v. 60, n. 5, p. 979-993, 2004.

ABATE, J.; WHITT, W. Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions. **ORSA Journal on Computing**, Catonsville, v. 7, n. 1, p. 36-43, 1995.

BAUDIN, M. **Programming in Scilab**. set. 2011. Acessado em 13 set. 2020. Disponível em: [https://www.scilab.org/sites/default/files/progscilab-v.0.10\\_en.pdf](https://www.scilab.org/sites/default/files/progscilab-v.0.10_en.pdf)

DUBNER, H.; ABATE, J. Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform. **Journal of the ACM**, New York, v. 15, n.1, p. 115-123, 1968.

DURBIN, F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. **The Computer Journal**, Oxford, v. 17, n. 4, p. 371-376, 1974.

TOMASCHEWSKI, F. K. **Solução da Equação  $S_N$  Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo**. 2012. 75f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

TONIDANDEL, D. A. V.; DE ARAÚJO A. E. A. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 34, n. 2, p. 1-6, 2012.