

## ESTUDO E APLICAÇÃO DE UMA ESTRATÉGIA DE CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO VIA TÉCNICA LQR

**ELISIANE COGOY DA SILVA<sup>1</sup>; ALEXANDRE MOLTER<sup>2</sup>; LESLIE D.  
PEREZ-FERNANDEZ<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Universidade Federal de Pelotas- UFPEL – elisics@hotmail.com*

<sup>2</sup>*Universidade Federal de Pelotas- UFPEL – alexandre.molter@ufpel.edu.br*

<sup>3</sup>*Universidade Federal de Pelotas- UFPEL – leslie.fernandez@ufpel.edu.br*

### 1. INTRODUÇÃO

Um dos sistemas que atraem à atenção dos pesquisadores é do pêndulo invertido. O interesse é dado pelo fato de ser um sistema com aplicabilidades em diversas áreas. Os sistemas de controle constituem, atualmente, suporte fundamental para os avanços da ciência, da engenharia elétrica, mecânica, aeroespacial, nuclear, construção civil, indústrias.

O pêndulo invertido é um sistema não linear e instável, constituído por uma base móvel sobre a qual oscila uma haste. Deslocando-se a base horizontalmente através de uma ação de controle, cuja intensidade depende do deslocamento angular da haste móvel em relação à posição vertical, procura-se manter à estabilidade do sistema na posição de equilíbrio.

Adotou-se esse sistema por ser o projeto do pêndulo invertido um problema clássico da teoria de controle. O comportamento oscilante da haste tenta reproduzir problemas oscilatórios de sistemas instáveis, frequentes em situações como: controle de trajetória de um projétil, lançamento de um foguete ao espaço, movimento de um satélite, testes em sistemas de veículos espaciais, controle de equilíbrio de robôs. Além disso, o sistema do pêndulo invertido faz analogia há diversos outros sistemas e até mesmo a vida cotidiana como o caso de tentar equilibrar um cabo de vassoura.

### 2. METODOLOGIA

Utilizando a leis da física e conceitos matemáticos é possível construir um modelo matemático do sistema. A massa está concentrada no topo da haste, portanto o centro de gravidade é o centro da esfera do pêndulo e considera-se que uma força de controle  $u$  é aplicada ao carro. Na figura 1, é apresentado um esquema onde identifica-se as variáveis envolvidas no sistema e ilustra-se a situação em que se está modelando. Note que um modelo matemático não é único para determinado sistema (OGATA, 2010).

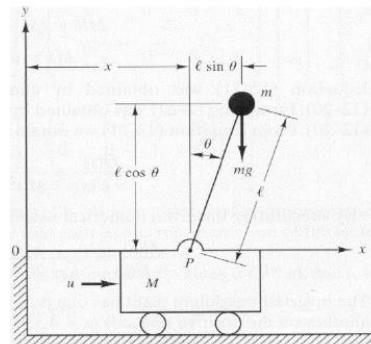


Figura1: Ilustração do modelo do pêndulo invertido. Fonte: (OGATA, 2010)

De acordo com a 2º lei de Newton quando é aplicada uma força sobre um objeto que contém massa, este adquire aceleração. Para um corpo em movimento circular, isto é, para um corpo em rotação, podemos determinar sua posição e velocidade em função de variáveis como o ângulo e a velocidade angular (é dado pela variação do espaço angular em relação ao tempo). O sistema não linear do pêndulo invertido é dado por:

$$\ddot{x} = \frac{u + mlsin(\theta)\dot{\theta}^2 - mgsin(\theta)\cos(\theta)}{(M+m-m\cos^2(\theta))} \quad \text{e} \quad \ddot{\theta} = \frac{ucos(\theta) - (M+m)gsin(\theta)\cos(\theta)}{(mlcos^2(\theta) - (M+m)l)} \quad (1)$$

Onde  $M$  é massa do carrinho;  $m$  é massa da haste;  $l$  é o comprimento da haste;  $g$  é aceleração de gravidade;  $\theta$  indica a rotação da haste do pêndulo em torno do ponto  $P$ ;  $u$  é a força aplicada ao carrinho na direção  $x$ .

Para simplificar o modelo e deixá-lo na forma linear admitimos:  $\theta(t)$  e  $\theta\dot{\theta}(t)$  sejam grandezas suficientemente pequenas para que se possa fazer  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 1$  e  $\theta\dot{\theta}^2 = 0$ . E assim, obtemos o modelo linearizado na forma de equações matriciais, conforme OGATA (2010), dado em espaço de estados o sistema (2) comprehende a equação de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (2)$$

Que pode ser escrito em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

em que  $x_i$  ( $i=1,\dots,4$ ) são as variáveis de estado e  $y_j$  ( $j=1,2$ ) são os valores de saída do sistema.

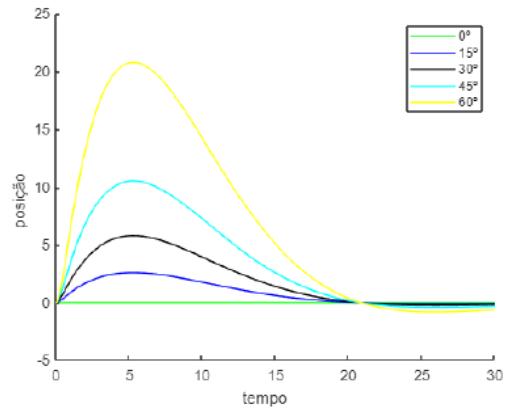
### Formulação do problema de controle

Neste trabalho adotou-se a aplicação da técnica de controle Regulador Linear Quadrático (LQR). O objetivo do controle ótimo é encontrar uma lei de controle  $u(t)$  que minimize o índice de desempenho:  $J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$ , ou seja, encontrar  $u^*(t)$  ótimo da solução do problema. Esses valores são encontrados resolvendo a equação matricial reduzida de Riccati. Onde dado o sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  e  $y = cx(t)$  que permite determinar a matriz  $K$  do vetor de controle ótimo, para minimizar o índice de desempenho, se os elementos não conhecidos da matriz  $K$  forem determinados para minimizar o índice de desempenho, então  $u(t) = -Kx(t)$  será ótimo para qualquer estado inicial.

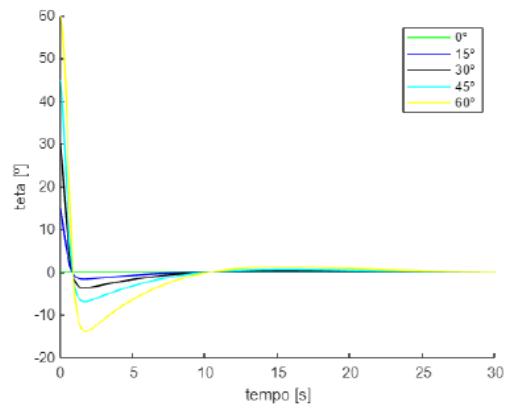
Finalmente, podemos aplicar o ganho  $K$  na malha de realimentação e chegar ao sistema controlado.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

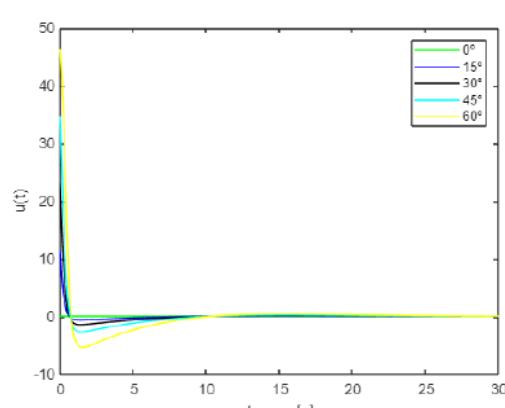
Para verificar a eficácia do modelo a simulação do sistema foi realizada no programa *MATLAB*, sem nenhuma entrada e levando em consideração as condições iniciais ( $\theta, 0, 0, 0$ ) onde  $\theta$  é tomado como:  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , e os valores dos parâmetros físicos são dados por:  $M=2\text{Kg}$ ;  $m=0,1\text{Kg}$ ;  $l=0,5\text{m}$ ;  $I(\text{inércia})= 0$ ;  $g= 9,81\text{m/s}^2$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 2: (a) Trajetórias temporais do sistema (3), (b) Trajetórias temporais do ângulo  $\theta$ , (c) Trajetórias temporais do controle  $u(t)$ .

Foi possível notar que o controle LQR proposto conseguiu controlar o sistema. Observou-se que o deslocamento angular sessou em aproximadamente 10s onde o sistema atinge o seu estado de equilíbrio.

Embora não apresentados aqui, foram testados outros valores para a matriz  $Q$  implicando em pequenas acelerações no tempo gasto para o sistema atingir o seu equilíbrio.

#### 4. CONCLUSÕES

Nesse trabalho apresentou-se um estudo da modelagem do pêndulo e da aplicação de uma estratégia de controle via técnica LQR proposto como trabalho avaliativo na disciplina de Sistemas de Controle cursada no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da UFPel. Como trabalho futuro pretende-se controlar o sistema não linear via Equação de Riccati Dependente do Estado.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno.** São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2010. 5. ed.

MATLAB. Online. Disponível em: <https://matlab.mathworks.com/> acessado em 2020.