Equações MHD

Jade Lacerda Fernandes[1], Joel Pavan[2]

[1] *Departamento de Física - UFPel - fernandes.l.jade@gmail.com*
[2] *Departamento de Física - UFPel - joel.pavan@ufpel.edu.br*

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é estabelecer os fundamentos da Teoria de Fluidos e das Equações da Magnetohidrodinâmica (MHD), com vistas a futuras simulações numéricas. No estado atual, o trabalho consiste em obter as equações que descrevem um Plasma como um fluido eletricamente carregado, a partir das quais podem ser obtidos subconjuntos de equações que descrevem sistemas particulares.

2 Metodologia

O processo inicia através da equação de Boltzmann, que descreve o comportamento coletivo de uma quantidade de partículas do tipo α no espaço de fase, quando sujeitas a forças, tanto internas como externas, onde o termo à direita representa a variação da função de distribuição por conta das colisões,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{coll} . \tag{1}$$

Agora, suponhamos uma propriedade física arbitrária χ. Esta propriedade, em geral, dependerá das coordenadas do espaço de fase $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Incluímos esta propriedade na equação, multiplicando toda a equação por esta quantidade χ e integrando-a sobre todas as velocidades,

$$\int_v \chi \, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \, d^3v \, + \int_v \chi \, \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha \, d^3v + \int_v \chi \, \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha \, d^3v = \int_v \chi \, \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{coll} d^3v \, . \tag{2}$$

A média da quantidade arbitrária χ é definida por,

$$< \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int_v \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \, f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \, , \tag{3}$$

onde n_α representa a densidade de partículas,

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \, . \tag{4}$$

No processo de média representado na equação (2) , surgem os *momentos* da função distribuição, definidos a seguir.

Diferentes valores de χ definem os *momentos* de f_α (juntamente com n_α), onde $\mathbf{u}_\alpha$ representa a velocidade media das partículas,

$$\mathbf{u}_{\alpha i}(\mathbf{r},t) =< v_i >_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)} \int_v v_i\, f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3v\,, \tag{5}$$

$\Pi_{\alpha ij}$ representa o tensor Fluxo de Momentum,

$$\Pi_{\alpha ij}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i\, v_j >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i\, v_j\, f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3v\,, \tag{6}$$

$\mathcal{E}_{\alpha ijk}$ representa o tensor de Fluxo de Energia,

$$\mathcal{E}_{\alpha ijk}(\mathbf{r},t) = \rho_{m\alpha} < v_i\, v_j\, v_k >_\alpha = m_\alpha \int_v v_i\, v_j\, v_k\, f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3v \tag{7}$$

$$\vdots$$

Os momentos podem ser reescritos definindo a flutuação da velocidade em relação à média das velocidades $\mathbf{c}_\alpha$,

$$\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha\,. \tag{8}$$

Dessa forma, o tensor Fluxo de Momentum se torna uma composição do produto da densidade de massa $\rho_{m\alpha}$ e do tensor duplo de velocidades médias $\rho_{m\alpha}\, \mathbf{u}_\alpha\, \mathbf{u}_\alpha$ somada ao tensor de pressão $\mathcal{P}_\alpha$,

$$\Pi_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{v}\,\mathbf{v} >_\alpha = \rho_{m\alpha}\, \mathbf{u}_\alpha\, \mathbf{u}_\alpha + \mathcal{P}_\alpha\,. \tag{9}$$

Da mesma forma para o tensor Fluxo de Energia, onde $\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha$ representa o fluxo de energia cinética transportada por convecção, $(\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha)$ simboliza a soma dos produtos entre as componentes de $\mathbf{u}_\alpha$ e $\mathcal{P}_\alpha$ e representa a a taxa do trabalho por unidade de área, e onde $\mathcal{Q}_\alpha$ é o tensor de energia térmica,

$$\mathcal{E}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{v}\,\mathbf{v}\,\mathbf{v} >_\alpha = \rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha, \mathcal{P}_\alpha) + \mathcal{Q}_\alpha\,. \tag{10}$$

Podemos observar mais detalhes nas definições seguintes, em que $\mathcal{P}_\alpha$ é dado pelo produto da densidade de massa $\rho_{m\alpha}$ pelo tensor duplo das parcelas randômicas das velocidades $< \mathbf{c}_\alpha\, \mathbf{c}_\alpha >$,

$$\mathcal{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{c}_\alpha\, \mathbf{c}_\alpha > \;. \tag{11}$$

Por sua vez, $\mathcal{Q}_\alpha$ é dado pelo produto da mesma densidade de massa $\rho_{m\alpha}$ pelo tensor triplo de velocidades randômicas $< \mathbf{c}_\alpha\mathbf{c}_\alpha\mathbf{c}_\alpha >$,

$$\mathcal{Q}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \mathbf{c}_\alpha\mathbf{c}_\alpha\mathbf{c}_\alpha > \;. \tag{12}$$

Além disso, é possível definir o vetor de fluxo de calor $\mathbf{q}_\alpha$, que representa a transferência de energia devido ao movimento randômico,

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < c_\alpha^2\, \mathbf{c}_\alpha > \;. \tag{13}$$

O vetor $\mathbf{q}_\alpha$ e o tensor $\mathcal{Q}_\alpha$ estão relacionados da seguinte forma, onde $\hat{\mathbf{n}}$ representa uma direção arbitrária,

$$q_{\alpha n} = \mathbf{q}_\alpha \cdot \widehat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2}\rho_{m\alpha} < c_\alpha^2\, \mathbf{c}_\alpha \cdot \widehat{\mathbf{n}} > , \tag{14}$$

$$q_{\alpha n} = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_{\alpha xxn} + \mathcal{Q}_{\alpha yyn} + \mathcal{Q}_{\alpha zzn}) \, . \tag{15}$$

O processo de média realizado sobre a equação inicial produz uma *hierarquia de equações*,

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \tag{16}$$

$$\rho_{m\alpha}\left[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha\right] + \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha - n_\alpha < \mathbf{F} >_\alpha = \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \tag{17}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{3p_\alpha}{2}\right) + \frac{3p_\alpha}{2}\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + (\mathcal{P}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha \tag{18}$$

$$\vdots$$

A equação (16) é chamada de *Equação de Continuidade*, com $\mathcal{S}_\alpha$ representando a perda de partículas devido às colisões; a equação (17) é chamada *Equação de Movimento*, com $< \mathbf{F} >_\alpha$ representando as forças que atuam no sistema e $\mathbf{A}_\alpha$ representando a taxa de mudança de momento por unidade de volume dadas às colisões e a equação (18) é a *Equação de Energia*, em que p_α representa a pressão escalar no sistema e M_α representa a taxa de variação da densidade de energia devida às colisões.

Para sistemas eletricamente carregados, em que as forças $\mathbf{F}$ são de origem eletromagnética, vale a Força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \, . \tag{19}$$

Adicionalmente, o sistema deve obedecer às Equações de Maxwell (com $\rho_\alpha = n_\alpha q_\alpha$ e $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{20}$$

Este é o conjunto de equações que descrevem o comportamento de um fluido condutor multiespécie.

3 Resultados e Conclusões

O presente trabalho estabelece o conjunto de equações necessárias para o estudo da dinâmica de fluidos eletricamente carregados (plasmas). O desenvolvimento da teoria resulta em uma hierarquia de equações acopladas, que precisam ser tratadas dentro de um modelo específico que produza o fechamento do sistema de equações. Os resultados obtidos permitem o futuro desenvolvimento do trabalho na forma de simulações numéricas do sistema de equações.

4 Referências Bibliográficas

- BITTENCOURT, J.A. Fundamentals of Plasma Physics. 3ª edição. Nova Iorque, NY, EUA: Springer, 2010
- CHEN, Francis F. Introduction to Plasma Physics. 1ª edição. Nova Iorque, NY, EUA: Springer, 2012
- GOLDSTON, R.J., RUTHERFORD, PH. Introduction to Plasma Physics. 1ª edição. Boca Raton, FW, EUA: CRC Press, 2018

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPERGS pelo suporte ao presente trabalho.

* * *