ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS *p* - SOMÁVEIS COMO ESPAÇOS NORMADOS

FILIPE ALMEIDA PEDRA[1]; MAURÍCIO ZAHN[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – filipeapedra@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – mauricio.zahn@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Uma métrica num conjunto não vazio M (LIMA, 1983) é uma função $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que associa cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ a um número real $d(x, y)$, chamada distância de x a y, de modo que $\forall\, x, y \in M$ obedeça as seguintes condições:
(a) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e só se, $x = y$ (positividade)
(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)
(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular)

Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto e d uma métrica. Podemos denotar um espaço métrico (M, d) apenas por M, deixando subtendida a métrica usada. Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função $||\,.\,||: E \to \mathbb{R}$ que associa cada vetor a um número real $\|x\|$, chamado norma de x de modo a obedecer as seguintes condições: para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:
N1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Todo espaço vetorial normado torna-se um espaço métrico por meio da métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ induzida pela norma.

O matemático polonês Stefan Banach foi quem iniciou um estudo abrangente de espaços normados em sua dissertação de 1922.

Outra definição importante para o presente trabalho são os espaços das sequências p – somáveis, denotados por l_p, onde $1 \leq p < \infty$, ou seja, o conjunto de todas as sequências $x = (x_i) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$.
Nosso objetivo nesta pesquisa foi mostrar que a Aplicação $||.||: l_p \to [0, \infty)$ dada por

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em l_p.

2. METODOLOGIA

O presente trabalho foi realizado através de pesquisa biblliográfica em artigos e livros e mediante reuniões com o orientador a fim de construir um embasamento teórico para os estudos sobre os espaços métricos, os espaços l_p e uma introdução à Análise Funcional. Para podermos provar que a aplicação definida em l_p é uma norma, foi preciso deduzir uma importante desigualdade, conhecida como Desigualdade de Minkowski (FABIAN et al, 2001).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Definição 1: Seja $p > 1$ um número real. Definimos o número real q de forma que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dessa forma, dizemos que p e q são expoentes conjugados um do outro

Lema 1*: Para todo* $a, b \geq 0$ *e para todo* $0 < \lambda < 1$*, vale a desigualdade*

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

Demonstração. Observa-se que quando $b = 0$ a desigualdade vale trivialmente. Para $b \neq 0$, a desigualdade pode ser dividida por b, resultando em

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leq \lambda \left(\frac{a}{b}\right) + (1-\lambda)$$

A razão $\frac{a}{b} \geq 0$ pode ser escrita como *t* e assim definindo $f[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como

$$f(t) = t^{\lambda} - \lambda t$$

A partir disso, os pontos críticos dessa função serão examinados. Como $f'(t) = \lambda(t^{\lambda-1} - 1)$, logo a função tem seu ponto crítico quando $t = 1$. Analisando a derivada, temos que $f'(t)$ é positiva em [0,1) e logo $f(t)$ é crescente neste intervalo e que $f'(t)$ é negativa em $(1, +\infty)$, o que resulta que a função é decrescente neste intervalo. A partir destes resultados conclui-se que $t = 1$ é um máximo de $f(t)$.

Para $t = 1$, temos que $f(1) = 1 - \lambda$ e como este é máximo da função, logo $f(t) \leq 1 - \lambda$. Portanto, $t^{\lambda} - \lambda t \leq 1 - \lambda$ e disso conclui-se que $\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leq \lambda \left(\frac{a}{b}\right) + (1 - \lambda)$, o que equivale a $a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$

Lema 2 (Desigualdade de Hölder): *Dados* $x = (x_i)$ *e* $y = (y_i)$*, elementos quaisquer de* l_p *e* q *o expoente conjugado de* p*, então:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i . y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração. A notação será simplificada utilizando

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad e \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dessa forma, definimos os números

$$a = \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p \quad , \quad b = \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q \quad e \quad \lambda = \frac{1}{p}$$

A partir disso, utilizamos a desigualdade do Lema acima e obtemos

$$\left[\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p{}^p} + \frac{1}{p} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q{}^q},$$

ou seja,

$$\frac{|x_i \cdot y_i|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p{}^p} + \frac{1}{p} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q{}^q}$$

Como a desigualdade é válida para todo índice i, logo pode ser somado até certo índice n e passando o limite $n \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot y_i|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}{\|x\|_p{}^p} + \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q}{\|y\|_q{}^q}$$

Portanto:

$$\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i \cdot y_i| \leq \frac{1}{p}\frac{\|x\|_p{}^p}{\|x\|_p{}^p} + \frac{1}{p}\frac{\|y\|_q{}^q}{\|y\|_q{}^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i \cdot y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

Lema 3(Desigualdade de Minkowski): *Dados* $p \in [1, +\infty)$ e $x = (x_i), y = (y_i) \in l_p$, *vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração:

Sendo p e q expoentes conjugados um do outro, para todo $i \in \mathbb{N}\ vale$

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1}$$
$$= |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

Somando de $i = 1$ até n_0 fixado, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n_0}|x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n_0}|x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n_0}|y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

Para $m \geq n_0$ é válido que

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m}|x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{m}|y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

Passando o limite $m \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{\infty}|y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder para os somatórios à direita da desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty}|y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Considerando estas duas desigualdades temos:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Como $(p-1)q = p$, logo podemos escrever como

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

E como p e q são expoentes conjugados, concluímos que $(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

O próximo resultado encerra o objetivo de nosso estudo.

Proposição 1: l_p *é um espaço normado com norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração: Para isso, precisamos analisar as condições N1 a N3 da definição de norma.

N1)

$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_i|^p = 0 \Leftrightarrow x_i = 0\ \forall i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0$$

N2)

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p$$

N3) Para a terceira condição será utilizada a desigualdade de Minkowski:

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

4. CONCLUSÕES

A partir destes estudos foram encontrados alguns resultados interessantes. Primeiramente a definição de uma norma para o espaço l_p, e consequentemente de uma métrica induzida por esta norma, retrata o uso destes conceitos para um espaço de sequências, o que implica na utilização de um conceito de distância entre duas sequências. Salientamos que este estudo é inicial, ou seja, o próximo passo será estudar os Espaços de Banach, que são espaços vetoriais normados e completos com a métrica induzida pela norma (daí a importância de se estudar métrica também), e com isso mostrar que os espaços l_p são de Banach. Salientamos que a teoria dos espaços de Banach surgiu na década de 20, com os trabalhos de Análise Funcional de S. Banach.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIEZUNER, R. J. **Análise Funcional.** 2009. 123p. Notas de aula

FABIAN, M; et al. **Functional Analysis and Infinite - Dimensional Geometry.** New York – Berlin – Heidelberg: Srpinger-Verlag, 2001.

LIMA, E.L. **Espaços Métricos**. Local de Edição: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

NASCIMENTO, C. A. Estudo sobre espaços de Banach e de Hilbert com aplicações em Equações Diferenciais, Integrais e Teoria da Aproximação. 2018. Dissertação(mestrado) – Mestrado profissional em Matemática, Universidade Estadual Paulista.