PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA: CORRESPONDÊNCIA ENTRE PONTOS DE UMA ESFERA E PONTOS DE UM PLANO

ANDRESSA LIXIESKI MANSKE[1]; DANIELE PEREIRA FERREIRA[2]; MARÍLIA KASTER PORTELINHA[3]; LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER[4]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – andressalmanske@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – pereiraferreiradaniele@gmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – marilialimatlg@gmail.com*
[4]*Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

No curso de Licenciatura em Matemática não existe uma disciplina totalmente voltada para a Geometria Esférica. A Iniciação Científica em Geometria tem como principal proposta fazer um estudo introdutório de Geometrias não Euclidianas, mais especificamente, em uma das ações, abordar tópicos da Geometria Esférica.

Ao longo da história, foi necessária uma representação plana da Terra, buscando atender determinadas necessidades humanas, em decorrência disso, os cartógrafos se utilizaram de diferentes tipos de projeções, cada uma com características e finalidades diferentes. Uma dessas projeções cartográficas recebe o nome de projeção plana ou azimutal, na qual a projeção estereográfica está inserida.

Neste trabalho será determinada a aplicação projeção estereográfica, que visa definir matematicamente o comportamento de pontos da esfera no plano e vice-versa, ou seja, sabendo as coordenadas de um ponto na esfera, como obtemos as coordenadas desse ponto projetado no plano e, posteriormente, sabendo as coordenadas do ponto projetado, como obtemos as coordenadas desse ponto na esfera. A aplicação projeção estereográfica foi escolhida como objeto de estudo deste trabalho em virtude da importância de sua utilização na representação do globo terrestre, tridimensional, para uma representação plana, sendo uma das formas utilizadas na construção de mapas.

2. METODOLOGIA

A Iniciação Científica em Geometria, voltada para o estudo da Geometria Esférica, visa iniciar os alunos envolvidos à pesquisa na área da Matemática Pura, especificamente na área de Geometria Esférica, introduzir conceitos matemáticos mais gerais, não trabalhados no curso de graduação e desenvolver o Raciocínio Lógico-Matemático. No momento o projeto encontra-se no estudo do tópico de mapeamento de esferas, assim, este trabalho foi desenvolvido com estudos de algumas propriedades da projeção estereográfica, para isso, utilizamos o vídeo Dimensions Chapter 9 (LEYS; GHYS; ALVAREZ, 2009).

Foi realizada a revisão bibliográfica sobre a projeção estereográfica (SILVA, 2011) e (LEIVAS; CAMACHO, 2015), mais especificamente, sua análise matemática. Os estudos e discussões foram realizados de forma remota através de encontros semanais com as alunas e a orientadora do projeto, utilizando a plataforma WEBConf da UFPel.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A **projeção estereográfica** consiste em projetar a superfície de uma esfera em um plano, chamado **plano de projeção**. Para isso, escolhemos um ponto para a origem da projeção e um plano que deve ser perpendicular ao eixo definido pelo ponto de projeção. Assim, a superfície da esfera pode ser representada nesse plano, com exceção do ponto de projeção que tem como correspondência um ponto no infinito. Uma característica da projeção estereográfica é que as medidas dos ângulos são conservadas, diferentemente das áreas que não são preservadas.

Segundo LEIVAS; CAMACHO (2015) a **projeção estereográfica** pode ser assim definida:

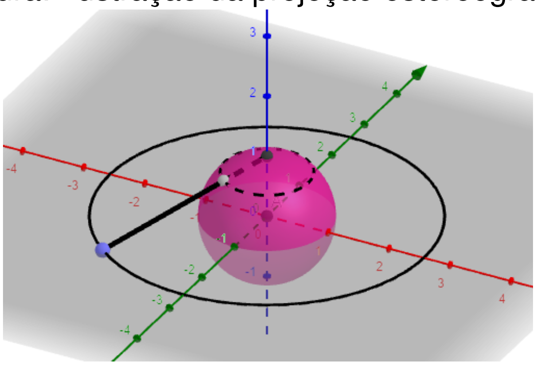
Definição: Consideremos a esfera unitária $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \in \mathbb{R}\}$, no espaço tridimensional, e dela retiraremos um ponto, $N = (0, 0, 1)$. Consideremos, também, um plano horizontal X0Y, denotado por β. Sobre a esfera, tomemos um ponto P≠N qualquer. A função definida por:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & S^2 - \{N\} \to \beta \\ & P \to \varphi(P) = P' = NP \cap \beta \end{aligned}$$

é chamada **projeção estereográfica** com centro de projeção N.

Uma ilustração da projeção estereográfica pode ser observada na Figura abaixo.

Figura: Ilustração da projeção estereográfica



Fonte: Autoras

Definida a projeção estereográfica, podemos demonstrar a proposição que é o objeto de estudo deste trabalho, sendo assim:

Proposição: Considere uma esfera de raio 1 e de centro na origem do referencial cartesiano de $\mathbb{R}^3$. Tome o ponto S(0,0,−1) para origem da projeção e o plano z = 1 para plano da projeção. Sejam P*(a, b, c)* as coordenadas de um ponto da esfera e P′*(A, B, 1)* as coordenadas da projeção estereográfica do ponto P no plano, então:

(1) *(A, B, 1)* = $\left(\dfrac{2a}{c+1}, \dfrac{2b}{c+1}, 1\right)$

(2) *(a, b, c)* = $\left(\dfrac{4A}{A^2+B^2+4}, \dfrac{4B}{A^2+B^2+4}, \dfrac{4-A^2-B^2}{A^2+B^2+4}\right)$

Demonstração:

No item (1) queremos encontrar as coordenadas do ponto P′ sabendo as coordenadas do ponto P. Para isso, seja P*(a, b, c)* um ponto da esfera unitária de centro na origem então, P satisfaz a condição: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Seja S(0,0,−1) a origem da projeção e o plano z = 1 o plano da projeção. Os pontos S e P determinam uma reta, assim, a reta SP tem a seguinte equação vetorial:

$$SP: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (0,0,\text{-}1) + \mu(a,b,c+1), \mu \in \mathbb{R}\}$$

Queremos encontrar o ponto P′ que resulta da intersecção da reta SP com o plano z = 1, então P′ terá de coordenadas (A, B, 1) em $\mathbb{R}^3$. Determinando as equações paramétricas da reta SP, obtemos as seguintes equações

$$(x,y,z) = (0,0,\text{-}1) + \mu(a,b,c+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu a \\ y = \mu b \\ z = -1 + \mu(c+1) \end{cases}$$

Como P′ é um ponto que pertence a reta SP, pois é a intersecção da reta SP com o plano z = 1, podemos substituir as coordenadas de P′ nas equações paramétricas para obter as coordenadas de P′ em função das coordenadas de P.

$$P' \in SP \Leftrightarrow \begin{cases} A = \mu a \\ B = \mu b \\ 1 = -1 + \mu(c+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2a}{c+1} \\ B = \dfrac{2b}{c+1} \\ \mu = \dfrac{2}{c+1} \end{cases}$$

Assim, P′ = (A, B, 1) = $\left(\dfrac{2a}{c+1}, \dfrac{2b}{c+1}, 1\right)$

Portanto, o primeiro item está demonstrado.

No item (2), queremos determinar o ponto P*(a,b,c)* da esfera sabendo que a sua projeção é o ponto P′*(A,B,1)*. Os pontos S e P′ determinam uma reta, assim, seja a reta SP′ com a seguinte equação vetorial:

$$SP': \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (0,0,\text{-}1) + \mu(A,B,2), \mu \in \mathbb{R}\}$$

A equação simétrica de SP′ é a seguinte:

$$(x,y,z) = (0,0,\text{-}1) + \mu(A,B,2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu A \\ y = \mu B \\ z = -1 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{x}{A} \\ \mu = \dfrac{y}{B} \\ \mu = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z+1}{2}$$

O ponto P*(a,b,c)* satisfaz a condição $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e pertence a reta SP′, logo:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B} \\ \dfrac{a}{A} = \dfrac{c+1}{2} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{aB}{A} \\ c = \dfrac{2a}{A} - 1 \\ a^2 + \left(\dfrac{aB}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{2a}{A} - 1\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Através da resolução deste sistema obtemos:

$$\begin{cases} b = 0 \ \vee \ b = \dfrac{4B}{A^2 + B^2 + 4} \\[2ex] c = -1 \ \vee \ c = \dfrac{4 - A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + 4} \\[2ex] a = 0 \ \vee \ a = \dfrac{4A}{A^2 + B^2 + 4} \end{cases}$$

Logo:

P = (0,0,-1) ou P = *(a,b,c)* = $\left(\dfrac{4A}{A^2 + B^2 + 4}, \dfrac{4B}{A^2 + B^2 + 4}, \dfrac{4 - A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + 4} \right)$

Portanto, o segundo item está demonstrado.

c.q.d.

Assim, através da demonstração, observamos o comportamento de pontos da esfera no plano e vice-versa, ou seja, conseguimos determinar como projetar pontos de uma superfície esférica em um plano e de um plano na superfície esférica. Vale ressaltar que os cálculos dependem da escolha do ponto para a origem da projeção e do plano utilizado para a projeção, mas as propriedades continuam as mesmas, se pegarmos um ponto na esfera conseguiremos determinar o ponto correspondente na projeção, com exceção do ponto de origem da projeção que direciona ao infinito.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho nos proporcionou explorar algumas propriedades da Geometria Esférica, até então desconhecidas por nós, especialmente propriedades que dizem respeito a projetar estereograficamente uma esfera sobre um plano, técnica muito utilizada pelos cartógrafos na confecção de mapas, que encontraram assim, uma maneira de estabelecer uma correspondência um a um entre pontos do globo terrestre e pontos em um plano, ou seja, em um mapa. A continuação deste trabalho será estudar o fato da projeção estereográfica não ser uma isometria, ou seja, não preservar as distâncias, mas sim ser uma aplicação conforme, isto é, preservar ângulos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LEIVAS, J. C. P.; CAMACHO, G. G.. Projeção estereográfica e inversão: uma motivação para uma Geometria não-Euclidiana. **VIDYA**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 215-236, 11 out. 2015. DOI https://doi.org/10.37781/vidya.v35i2.588. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/588/553. Acesso em: 3 set. 2020.

DIMENSIONS Chapter 9. Produção: Jos Leys; Étienne Ghys; Aurélien Alvarez. [S. l.]: Creative Commons, 2009. Disponível em: https://www.youtube.com/embed/6cpTEPT5i0A?list=PL3C690048E1531DC7. Acesso em: 17 jun. 2020.

SILVA, A. M. M. M. **Projecção estereográfica propriedades e aplicações**. 2011. 119p. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.