ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DE MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

CÁSSIO FEHLBERG LEMOS[1]; CAMILA PINTO DA COSTA[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas – cassiofehkberg@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – camiladacosta@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

A transformada de Laplace é uma transformada integral que permite transformar equações diferenciais ordinárias em equações polinomiais. Ela pode ser expressa por $F(s) = \mathcal{L}(\mathrm{f(t)}) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, e só existe se a integral convergir para algum valor real de s (TONIDANDEL; ARAÚJO, 2012). O grande desafio desta transformada encontra-se em realizar a sua inversão. Existem diversos métodos numéricos para realizar esta tarefa, cada um com suas vantagens e desvantagens. Porém, todos eles apresentam um fato em comum, todos possuem uma margem de erro. O objetivo deste trabalho está em estudar esses métodos, analisando quais valores de parâmetros são melhores e quais métodos funcionam melhor para determinados tipos de função. Para o estudo deste trabalho foram escolhidos os métodos numéricos de inversão Fixed Talbot, Dubner-Abate, Durbin, Gaver-Stehfest e Euler.

O método Fixed Talbot é um dos métodos mais recentes, sendo desenvolvido em 2004. O fato deste método conseguir deformar o contorno padrão na integral de Bromwich é o que o torna tão inovador (ABATE; VALKÓ, 2004). De acordo com FERREIRA (2019) podemos calcular o método Fixed Talbot com a equação $f(t,\ M) = \frac{r}{M}\left\{\frac{1}{2}F(r)\exp(rt) + \sum_{k=1}^{M-1} Re\left[exp\left(ts(\theta_k)\right)F\left(s(\theta_k)\right)\left(1 + i\sigma(\theta_k)\right)\right]\right\}$, onde $r = \frac{2M}{N_t t}$, $i = \sqrt{-1}$, $s(\theta) = r\theta(\cot\theta + i)$, $-\pi < \theta < \pi$, $\theta_k = \frac{k\pi}{M}$, $\sigma(\theta) = \theta + (\theta\ \cot\theta - 1)\cot\theta$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Dubner-Abate é um método numérico de inversão criado em 1968. Ele realiza a inversão através da transformada de cosseno de Fourier finita (HSUF; DRANOF, 1987). Quando lançado, ele foi muito inovador, pois era fácil de implementar e era processado rapidamente nos computadores da época (DUBNER; ABATE, 1968). Para calcular Dubner-Abate é usado a equação $f(t,T) = \frac{2e^{at}}{T}\left[\frac{1}{2}Re\{F(a)\} + \sum_{k=1}^{NSUM} Re\{F(\alpha)\}\cos(\theta)\right]$, onde $NSUM \geq 200$, $\alpha = a + i\frac{k\pi}{T}$, $\theta = \frac{k\pi}{T}t$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $Re(s) \geq a > 0$, $t \leq \frac{T}{2}$, $i = \sqrt{-1}$.

No ano de 1974, foi desenvolvido por Durbin um método muito similar ao método Dubner-Abate. Nesse método foi adicionado a função seno com propósito de ter um coeficiente de erro menor que no método Dubner-Abate (DURBIN, 1974). Podemos calcular o método com a equação $f(t,T) = \frac{e^{at}}{T}\left[-\frac{1}{2}Re\{F(a)\} + \sum_{k=0}^{NSUM} Re\{F(\alpha)\}\cos(\theta) - Im\{F(\alpha)\}\sin(\theta)\right]$, onde $NSUM \geq 200, \alpha = a + ik\frac{\pi}{T}, \theta = k\frac{\pi}{T}t,\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, i = \sqrt{-1}, Re(s) \geq a > 0, 0 \leq t \leq 2T$.

Gaver-Stehfest é um método que surgiu em 1966 e foi mais desenvolvido em 1970. Ele ficou muito popular devido sua simplicidade e eficiência. Esse método tem como vantagem poder olhar somente para o eixo dos reais (Tomaschewski, 2012). Calculamos este método numérico com a equação $f(t,N) =$

$\frac{\ln 2}{t}\sum_{i=1}^{N} V_i F\left(\frac{\ln 2}{t} i\right)$, onde $V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+i} \sum_{floor\left[k=\left(\frac{i+1}{2}\right)\right]}^{Min\left(i,\frac{N}{2}\right)} \frac{\alpha}{\beta(k-1)!\delta}$, $\alpha = k^{\frac{N}{2}}(2k)!\,, \beta = \left(\frac{N}{2} - k\right)!\,(k)!\,, \delta = (i-k)!\,(2k-i)!\,, F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, N é um número par $\in \mathbb{R}$.

Criado em 1995, o método de Euler foi um algoritmo simples criado para ajudar com funções de distribuição cumulativa de probabilidade. Apesar de ser direcionado para uma certa área, ele se demonstrou eficiente para muitas funções (ABATE; WHITT, 1995). Euler é calculado com a equação $f(t,m) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} 2^{-m} s_{n+j}(t)$, onde $s_n(t) = \frac{e^{\frac{A}{2}}}{2t} Re\left\{F\left(\frac{A}{2t}\right)\right\} + \frac{e^{\frac{A}{2}}}{t}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k Re\left\{F\left(\frac{A+2k\pi i}{2t}\right)\right\}$, $i = \sqrt{-1},\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

2. METODOLOGIA

O primeiro passo na pesquisa foi estudar a parte teórica e realizar vários exercícios relacionados a transformada de Laplace. Após a familiarização com o conteúdo, foi dado início a escolha dos métodos numéricos de inversão. Conforme os métodos iam sendo escolhidos, ia-se desenvolvendo programas no Scilab que faziam os cálculos dos métodos para poder realizar diversos testes.

Durante os testes, cada método numérico de inversão teve um parâmetro alterado diversas vezes. Então, foi escolhido um valor de parâmetro que aparentemente demonstrou melhores resultados, e então foi testado um valor acima e um valor abaixo nesse mesmo parâmetro para ver se o desempenho deles seria melhor ou pior que o valor atualmente escolhido. Caso fosse melhor, o processo era realizado novamente com este valor melhor. Os demais parâmetros mantiveram o valor indicado pelos artigos de onde suas equações foram retiradas.

Para comparação de resultados, foram feitas diversas tabelas. As funções utilizadas foram $f(t) = 1,\ f(t) = t,\ f(t) = t^3,\ f(t) = \sin t\,,\ f(t) = \cosh t$ e $f(t) = e^{-t}$. Em cada função, utilizamos o intervalo de $0 \le t \le 10$. Para auxiliar a comparação de resultados, também foram feitas tabelas com o cálculo do erro absoluto.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o método numérico de inversão Fixed Talbot, tivemos melhores resultados com o parâmetro M = 50. O parâmetro N_t foi mantido igual a 7. O Fixed Talbot apresentou bons resultados para todas as funções testadas para t de 1 a 10, não conseguindo realizar o cálculo somente para t = 0.

Com o método Dubner-Abate, os melhores resultados foram obtidos com o parâmetro T = 30. Já aT foi mantido igual a 7 em todos os testes. Ele apresentou resultados consideravelmente satisfatórios para $0 \le t \le 10$ com as funções $f(t) = 1,\ f(t) = t,\ f(t) = \sin t$ e $f(t) = e^{-t}$. Para a função $f(t) = t^3$, os resultados obtidos foram pouco satisfatórios para t<6, apresentando erro abaixo de 1,65, e para t >= 6 os resultados foram piores, com erro acima de 2,39. O método numérico não conseguiu fazer a inversão para a função $f(t) = \cosh t$, achando números distantes do resultado exato da função.

O método numérico Durbin apresentou resultados mais aproximados que seu predecessor, o método Dubner-Abate, para maior parte das funções, com exceção da função constante e da função exponencial. Aqui, os melhores resultados foram apresentados com T = 20, e o parâmetro aT continuou com o valor igual a 7. A Função constate e a função exponencial apresentaram melhores resultados com o parâmetro T = 30, mas seus resultados com T = 20 também foram satisfatórios. Na função constante, t = 0 apresentou um resultado um pouco distante, com um erro absoluto de 5,04E-01. Como no seu predecessor, os resultados para a função cosseno hiperbólico foram distantes.

No método Gaver-Stehfest tivemos os resultados mais satisfatórios com N = 18. Como no método Fixed Talbot, este também não conseguiu realizar os cálculos para t = 0. Este método apresentou um bom desempenho para maior parte das funções, com exceção das funções seno e cosseno hiperbólico. Os resultados para o seno foram consideravelmente satisfatórios para t < 6, e um pouco mais distantes do valor da exata para t >= 6. Novamente a função do cosseno hiperbólico não funcionou, encontrando resultados distantes quando colocada neste método numérico, com exceção em t = 1 que apresentou resultados aproximados.

Para Euler, os melhores resultados foram encontrados com m = 11. Utilizamos A=18,4 e n=15 para todos os testes. O parâmetro m = 13 também apresentou resultados bem interessantes. Tanto m = 11 quanto m = 13 apresentaram resultados bem similares para maior parte das funções. Porém, m = 11 demonstrou melhores resultados para a função constante e para função cosseno hiperbólico. Já m = 13, demostrou melhores resultados para a função exponencial. Com exceção do cosseno hiperbólico, todas as funções apresentaram resultados satisfatórios para t = 1 até t = 10. Esse método não conseguiu calcular a inversa de Laplace para as funções testadas quando t=0. Na função $f(t) = \cosh t$, obtivemos resultados aproximados até t = 6, para t > 6, os resultados começaram a ficar bem distantes do valor exato.

4. CONCLUSÕES

Como é possível ver nos resultados, não existe um método que funcione com todas funções e em todo intervalo. Cada método possui suas vantagens e desvantagens para cada função, e para saber qual método numérico é o mais adequado, é necessário avaliar as características da função utilizada. O estudo ainda não foi finalizado. Pretende-se realizar mais testes e alterar outros parâmetros que foram mantidos com um mesmo valor nos testes atuais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a FAPERGS pelo fomento à pesquisa.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

TONIDANDEL, D. A. V. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 34, n. 2, p. 1-6, 2012.

ABATE, J.; VALKÓ, P. P.Multi-precision Laplace transform inversion. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, John Wiley & Sons, v. 60, n. 5, p. 979-993, 2004.

HSU, J.T.; DRANOFF, J.S., Numerical inversion of certain laplace transforms by the direct application of fast fourier transform (FFT) algorithm. **Computers & Chemical Engineering**, Texas A&M University College Station, College Station, Texas, United States, v. 11, n. 2, p. 101-110, 1987.

DUBNER, H.; ABATE, J., Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform. **Journal of the ACM**, Computer Applicalions, Inc., New York, New York, v. 15, n.1, p. 115-123, 1968.

DURBIN, F. Numerical inversion of Laplace transforms:an efficient improvement to Dubner and Abate's method. **The Computer Journal**. Commissariat a l'Energie Atomique Centre U—Service Electronique, B.P. 61,120—Montrouge, France. v. 17, n. 4, p. Pages 371-376, 1974.

ABATE, J.; WHITT, W. Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions. **ORSA Journal on Computing**. 5521 Research Park Drive, Suite 200 Catonsville, MD 21228 USA. v. 7, n. 1, p. 36-43, 1995.

FERREIRA, A. M. **HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA COM TRANSFORMADA DE LAPLACE NA MODELAGEM DE MEIOS MICROPERIÓDICOS**. 2019. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas.

TOMASCHEWSKI, F. K. **Solução da Equação S_N Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo**. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Inverting Laplace Transform in R. RK's Musing, 20 fev. 2015. Acessado em 09 nov. 2019. Disponível em: https://radhakrishna.typepad.com/rks_musings/2015/02/inverting-laplace-transforms-in-r.html