SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO BIDIMENSIONAL PARA A DISPERSÃO DE POLUENTES EM CORPOS HÍDRICOS PELO MÉTODO GILTT

ANDRÉ RICKES[1]; JOSIANE KONRADT[2]; TAMIRES FONSECA DE ALMEIDA[3]; GUILHERME JAHNECKE WEYMAR[4]; RÉGIS SPEROTTO DE QUADROS[5]; DANIELA BUSKE[6]

[1]Universidade Federal de Pelotas – andre.rickes@hotmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – josianekonradt@gmail.com
[3]Universidade Federal de Pelotas – tamiresfonsecadealmeida@hotmail.com
[4]Universidade Federal de Pelotas – guilhermejahnecke@gmail.com
[5]Universidade Federal de Pelotas – quadros99@gmail.com
[6]Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

O aumento da urbanização e do consumismo excessivo vem caracterizando os novos modelos sociais e econômicos, trazendo grandes consequências para o meio ambiente, como por exemplo, o aumento da poluição dos corpos hídricos. Esses eventos afetam negativamente a vida humana, tornando necessária a tomada de medidas preventivas que asseguram a qualidade de vida dos consumidores de tais recursos.

Para prevenir danos maiores causados por esses episódios, torna-se necessário o estudo de métodos que preveem o comportamento da dispersão de poluentes em meios hídricos, por meio da modelagem matemática. O presente trabalho apresenta o modelo matemático bidimensional de advecção-difusão para a dispersão de poluentes em rios, encontrado na literatura (OLIVEIRA, 2015), assim como sua solução, encontrada com auxílio do método *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT).

Segundo BUSKE, et al. (2010), a ideia principal do método GILTT consiste na expansão da concentração do poluente em uma série em termos das autofunções obtidas através de um problema auxiliar de Sturm-Liouville, substituição da expansão na equação a ser resolvida e obtenção de uma equação diferencial ordinária na forma matricial, que, por sua vez, é resolvida pela transformada de Laplace.

Como fundamentação teórica, foi utilizado o trabalho de BUSKE et al. (2017), no qual o método GILTT foi aplicado com o propósito de encontrar a solução dos modelos estacionários bidimensional e tridimensional de advecção-difusão para a dispersão de poluentes, considerando os termos de degradação química do poluente. Os autores apresentam simulações computacionais ilustrando os cálculos realizados, estabelecendo uma comparação com dados encontrados na literatura para a validação da solução encontrada analiticamente, concluindo que o método GILTT apresenta eficiência na modelagem de problemas envolvendo a dispersão de contaminantes em meios hídricos.

2. METODOLOGIA

Para a dispersão de poluentes em corpos hídricos, a equação que melhor descreve os fenômenos físicos para este tipo de problema baseia-se no princípio da conservação de massa e na Lei de Fick. Utilizando as hipóteses descritas no trabalho de MACHADO et al. (2018), o modelo bidimensional transiente para o transporte de uma espécie genérica de poluente que não sofre nenhuma reação química e se conserva em meios aquáticos, é descrito pela equação:

$$\frac{\partial C(x,z,t)}{\partial t} + U\frac{\partial C(x,z,t)}{\partial x} = D_x\frac{\partial^2 C(x,z,t)}{\partial x^2} + D_z\frac{\partial^2 C(x,z,t)}{\partial z^2}, \tag{1}$$

denominada equação de advecção-difusão bidimensional, onde $C = C(x,z,t)$ (em mg/m^3), representa a concentração média do poluente; t (em s), é o tempo após injeção; x e z (em m), representam as coordenadas longitudinal e vertical da posição, respectivamente; U (em m/s), representa a componente da velocidade instantânea do escoamento na direção x; D_x e D_z (em m^2/s), representam os coeficientes de dispersão nas direções x e z, respectivamente.

A equação (1) está sujeita à condição inicial correspondente a um despejo instantâneo de poluente por uma fonte pontual situada na superfície do rio:

$$C(x,z,t=0) = \frac{M}{A}\delta(x)\delta(z-L_z), \tag{2}$$

onde M (em mg), é a massa de poluente injetada; A (em m^2), é a área da seção molhada; δ é a função delta de Dirac e L_z (em m), é a profundidade do rio. Além disso, para as condições de contorno, foram utilizadas as seguintes expressões:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad C(L_x,z,t) = 0, \qquad \left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{z=0,\,L_z} = 0, \tag{3}$$

onde L_x (em m) é o comprimento fictício do rio, suficientemente grande (visto que o método GILTT não se aplica para domínio infinito).

Para a solução do modelo descrito acima, utilizou-se o método GILTT. Primeiramente, é tomado o problema auxiliar de Sturm-Liouville:

$$\varphi_k''(z) + \beta_k^2\varphi_k(z) = 0, \qquad 0 < z < L_z,$$
$$\varphi_k'(0) = 0, \qquad \varphi_k'(L_z) = 0, \tag{4}$$

que possui como solução as autofunções:

$$\varphi_k(z) = cos(\beta_k z), \qquad \beta_k = \frac{k\pi}{L_z}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

A seguir, a solução da equação diferencial parcial (1) é expandida como uma série em termos das autofunções (5):

$$C(x,z,t) = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\tilde{C}_k(x,t)\varphi_k(z) \approx \sum_{k=0}^{K_0}\tilde{C}_k(x,t)\varphi_k(z), \tag{6}$$

onde $\tilde{C}_k(x,t)$ são termos a serem determinados e K_0 é o índice no qual a soma (6) converge.

Substituindo a solução (6) na equação (1), aplicando o operador integral $\int_0^{L_z}(\,.\,)\varphi_l(z)dz$ em ambos lados da equação resultante e utilizando a condição de ortogonalidade entre funções, obtém-se a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{C}_k(x,t)\right] + U\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{C}_k(x,t)\right] - D_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\tilde{C}_k(x,t)\right] + D_z\beta_k^2\tilde{C}_k(x,t) = 0. \qquad (7)$$

Para a resolução da EDP (7), utiliza-se os mesmos passos acima, construindo um novo problema de Sturm-Liouville, agora na variável x, que possui como solução as autofunções:

$$\psi_n(x) = \cos(\lambda_n x), \qquad \lambda_n = \frac{\pi}{L_x}\left(\frac{1}{2}+n\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad (8)$$

e expandindo o termo $\tilde{C}_k(x,t)$ em uma série em termos dessas autofunções:

$$\tilde{C}_k(x,t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\overline{C_n}(t)\,\psi_n(x) \approx \sum_{n=0}^{N_0}\overline{C_n}(t)\,\psi_n(x), \qquad (9)$$

onde $\overline{C_n}(t)$ são termos a serem determinados, e N_0 é o índice no qual a soma (9) converge. Substitui-se a solução (9) na equação (7) e aplica-se o operador $\int_0^{L_x}(\,.\,)\,\psi_m(x)dx$, obtendo assim:

$$\sum_{n=0}^{N_0}\overline{C_n}'(t)\int_0^{L_x}\psi_n(x)\,\psi_m(x)dx + U\sum_{n=0}^{N_0}\overline{C_n}(t)\int_0^{L_x}\psi'_n(x)\,\psi_m(x)dx +$$
$$+ D_x\lambda_n^2\sum_{n=0}^{N_0}\overline{C_n}(t)\int_0^{L_x}\psi_n(x)\,\psi_m(x)dx + D_z\beta_k^2\sum_{n=0}^{N_0}\overline{C_n}(t)\int_0^{L_x}\psi_n(x)\,\psi_m(x)dx = 0 \quad (10)$$

Reescrevendo a equação (10) na forma matricial:

$$B\,Y'(t) + E\,Y(t) = 0 \qquad (11)$$

onde

$Y(t) = \{\overline{C_n}(t)\}$, $\qquad B = \{b_{n,m}\}$, onde $b_{n,m} = \int_0^{L_x}\psi_n(x)\,\psi_m(x)dx$,

$E = \{e_{n,m}\}$, onde $e_{n,m} = U\int_0^{L_x}\psi'_n(x)\psi_m(x)dx + (D_x\lambda_n^2 + D_z\beta_k^2)\int_0^{L_x}\psi_n(x)\psi_m(x)dx$.

Ou ainda, sendo $F = B^{-1}E$, reescreve-se a equação (11) da forma:

$$Y'(t) + F\,Y(t) = 0, \qquad (12)$$

Além disso, expandindo a condição inicial (2) nas séries (6) e (9), e realizando as mesmas operações acima, conclui-se que a equação (12) possui como condição inicial:

$$Y(0) = \begin{cases} \dfrac{2M}{L_zL_xA}, & se\ k = 0 \\ \dfrac{4M}{L_zL_xA}\varphi_k(L_z), & se\ k \neq 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Para resolver a EDO matricial (12), aplica-se a transformada de Laplace, em ambos os lados e utiliza-se suas propriedades. Neste problema, assume-se que a matriz F da equação (12) seja diagonalizável, ou seja, $F = X\,D\,X^{-1}$, onde D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de F, X é a matriz cujas colunas constituem os autovetores linearmente independentes de F e X^{-1} é sua inversa, e então a solução da equação (12) será:

$$Y(t) = X\,\mathcal{L}^{-1}\{(s\,I + D)^{-1}, s \to t\}\,X^{-1}\;Y(0). \tag{14}$$

Utilizando as propriedades da transformada inversa de Laplace, calcula-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s\,I + D)^{-1}, s \to t\} = exp(-D\,t) \coloneqq G(t). \tag{15}$$

Portanto, com a matriz $G(t)$ definida em (15), conclui-se que a solução da EDO matricial (12) é:

$$Y(t) = X\,G(t)\,X^{-1}\,Y(0). \tag{16}$$

Portanto, a solução do modelo bidimensional transiente da dispersão de poluentes em corpos hídricos, dado pelas equações $(1), (2)$ e (3) será:

$$C(x, z, t) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \left[\varphi_k(z) \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \overline{C_n}(t)\,\psi_n(x)\right], \tag{17}$$

que está bem definida, com os termos $\overline{C_n}(t)$ definidos na equação (16).

3. CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi encontrada a solução analítica para o problema de advecção-difusão bidimensional para a dispersão de poluentes em corpos hídricos pelo método GILTT. A princípio, os resultados encontrados aparentam ser condizentes com a realidade, contudo, planejamos futuramente realizar simulações computacionais e comparar os dados simulados com os dados da natureza encontrados na literatura.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUSKE, D.; QUADROS, R. S.; OLIVEIRA, R. E.; WEYMAR, G. J.; HARTER, F. P.. Analytical solution for contaminant dispersion model in rivers and canals applying the method GILTT. **International Journal of Development**, v. 7, p. 13857-13864, 2017.

BUSKE, D.; VILHENA, M.; MOREIRA, D.; TIRABASSI, T. A.. General Analytical Solution of the Transient Two-Dimensional Advection-Diffusion Equation with Non-Fickian Closure in Cartesian Geometry by the Generalized Integral Transform Technique. **Integral Methods in Science and Engineering: Analytic Methods**, Boston: Birkhäuser, 2010, p.33 - 40.

MACHADO, B. R.; BUSKE, D.; SIQUEIRA, T. M.; WEYMAR, G. J.; MORAES, R. K.. Simulação de um Modelo Bidimensional Transiente Aplicado à Dispersão de Poluentes em um Corpo Hídrico. In: **CONFERÊNCIA SUL EM MODELAGEM COMPUTACIONAL**, Rio Grande, 2018. Anais do 8º MCSul, 2018. v. 1. p. 1-14.

OLIVEIRA, R. E.. **Dispersão de contaminantes em rios e canais através do método GILTT**. 2015. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas.