

EQUAÇÕES DE LORENZ, CAOS TRANSIENTE E CONVERGÊNCIA

CARLOS EDUARDO LORENZO DIAZ DE OLIVEIRA¹; RONALDO MATIAS
TAVARES JUNIOR²; FABRÍCIO PEREIRA HÄRTER³;
VINICIUS CARVALHO BECK⁴

¹IFSUL Campus Pelotas - Visconde da Graça – clorenz33@gmail.com

²IFSUL Campus Pelotas - Visconde da Graça – ronaldomtjr@gmail.com

³Universidade Federal de Pelotas – fpharter@gmail.com

⁴IFSUL Campus Pelotas - Visconde da Graça – viniciuscavq@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

LORENZ (1963), mais interessando na natureza não periódica das soluções do modelo de SALTZMAN (1962) do que no problema convectivo, expandiu as variáveis de estado do modelo em série de Fourier e, restando apenas os termos de baixa ordem, obteve o seguinte sistema acoplado de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-linear. Este sistema ficou estabelecido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}X' &= -\sigma X + \sigma Y; \\Y' &= -XZ + RX - Y; \\Z' &= XY - bZ.\end{aligned}$$

Neste sistema de equações diferenciais, $\sigma=10$; $b=8/3$ e $R=28$ (número de Rayleigh para o sistema terra-atmosfera). Segundo TAVARES JUNIOR e BECK (2019), as variáveis X , Y e Z , representam, respectivamente, a intensidade convectiva, a diferença de temperatura entre as camadas e o perfil vertical de temperatura.

LORENZ (1963) chamou de *caóticos* sistemas que se caracterizam por apresentar sensibilidade às pequenas variações da condição inicial. No caso do *sistema de Lorenz*, é possível identificar diferentes comportamentos das variáveis de acordo com a variação do parâmetro R , conforme ilustrado na Tabela 1, que apresenta uma síntese proposta por ALLIGOOD *et al.* (1996).

Tabela 1 – Influência do Parâmetro R

Parâmetro R	Descrição
$[-\infty, 1.00]$	Equilíbrio em (0,0,0)
$[1.00, 13.93]$	Dois pontos de equilíbrio
$[13.93, 24.06]$	Existência de órbitas caóticas sem atrator caótico (<i>caos transiente</i>)
$[24.06, 24.74]$	Coexistência de atrator caótico e ação efetiva de pontos de equilíbrio
$[24.74, ?]$	Existência de atrator caótico, mas com pontos de equilíbrio com atração reduzida

Fonte: Autoria própria, com base nos dados de Alligood *et al.* (1996).

Ao analisarmos a terceira faixa (*caos transiente*) de valores indicada na Tabela 1, na qual o parâmetro R varia de 13.93 até 24.06, a informação de órbitas caóticas pode nos dar a impressão de que não há convergência. No entanto, com o uso de um simulador virtual, livremente acessível na internet, que plota o gráfico

do atrator caótico de Lorenz (HIGHFELLOW, 2020), foi possível realizar alguns testes iniciais, nos quais verificou-se convergência com $R=14$. A partir daí, surge o questionamento: para qual faixa de valores há convergência no regime de caos transiente?

O objetivo do presente trabalho é contribuir com dados experimentais para esclarecer a relação entre convergência e existência de órbitas caóticas no regime de caos transiente.

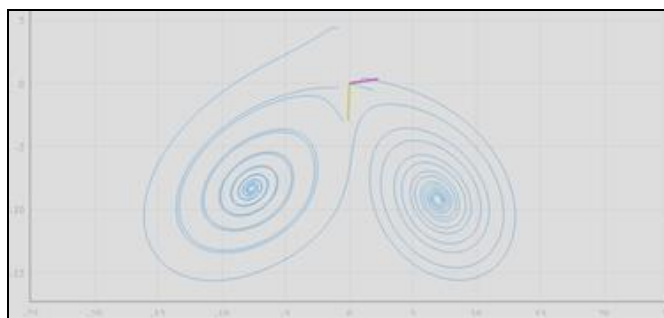
2. METODOLOGIA

Foi utilizado o simulador virtual *Lorenz system with flot.js* (HIGHFELLOW, 2020). Inicialmente, as análises foram realizadas com os valores de espalhamento $spread=5$, $var=1$ as variações $R=1$, $R=10$, $R=15$, $R=20$, $R=25$, e os parâmetros $\sigma=10$, $b=8/3$. Em seguida, observou-se a possibilidade de convergência para os valores $R=14$, $R=15$, $R=16$, $R=17$, $R=18$, $R=19$, $R=20$, $R=21$, $R=22$, $R=23$, $R=24$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Das simulações realizadas inicialmente, apresentamos a seguir três figuras ilustrativas dos experimentos computacionais. Na Figura 1, apresentamos o experimento com $R=10$.

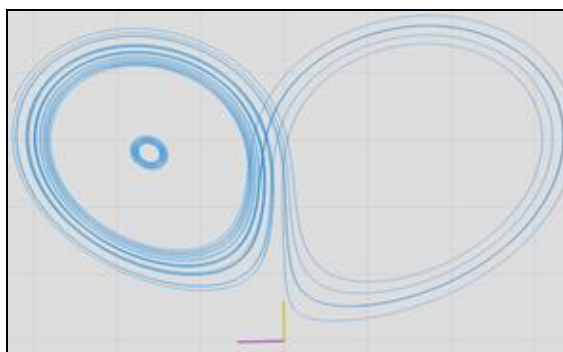
Figura 1 - Experimento com $R=10$.



Fonte: Simulação computacional (HIGHFELLOW, 2020).

No Experimento com $R=10$, o sistema apresenta dois pontos de equilíbrio. É importante ressaltar que nesta faixa de valores, independentemente da condição inicial, as órbitas são convergentes.

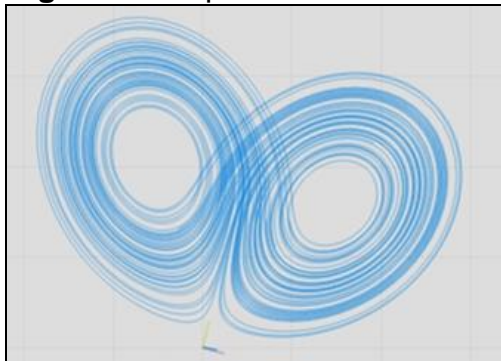
Figura 2 - Experimento com $R=15$



Fonte: Simulação computacional (HIGHFELLOW, 2020).

Na Figura 2, temos o Experimento com $R=15$. Para esta situação, com quatro séries de dados geradas, temos a formação de órbitas caóticas sem atratores caóticos, ou seja, há ocasiões em que as condições iniciais formam ou não órbitas caóticas. Também é possível observar duas séries que tendem aos pontos de equilíbrio. Por haver a possibilidade de ocorrer ou não órbitas caóticas, este regime é denominado *caos transiente*.

Figura 3 – Experimento com $R=20$



Fonte: Simulação computacional (HIGHFELLOW, 2020).

Na Figura 3, experimenta-se o valor $R=20$, sendo possível observar o aumento da formação de órbitas caóticas. Este comportamento é característico da faixa de valores próxima do regime caótico efetivo.

A seguir, apresentamos a Tabela 2, contendo uma análise qualitativa da dinâmica do parâmetro R em caos transiente. Nesta etapa da experimentação, observou-se a possibilidade de convergência em alguns testes realizados variando-se R de 14 até 24, com incrementos unitários.

Tabela 2 – Análise da Evolução de R

Parâmetro R	Descrição	Tempo de Convergência
14	converge	20,28seg
15	converge	24,88seg
De 16 até 24 (valores inteiros)	Sem convergência, com ocorrência de órbitas caóticas.	—

Fonte: Autoria própria.

É importante ressaltar que, dependendo da condição inicial, os resultados em termos de convergência podem ser outros. Apresentamos estes apenas a título de ilustração, que está em consistência com vários testes pilotos realizados antes da efetiva experimentação dos valores do parâmetro R selecionados.

Para $R=14$ e $R=15$ há predominância de trajetórias convergentes. A convergência se torna muito rara para as faixas de valores acima destas. Em um dos experimentos para valores maiores, por exemplo, para $R=16$, o computador ficou simulando por cerca de 24 horas sem dar sinais de convergência. Também aconteceu de levar cerca de 15 minutos para haver convergência para valores de R entre 15 e 16. Para valores acima disso, nos experimentos realizados, não foram observados casos de convergência.



De acordo com os experimentos realizados no simulador, pôde-se observar que a medida em que o parâmetro R aumenta, mais rara é a convergência. Na faixa entre $R=14$ e $R=15$ observamos muitos casos. Testando valores no intervalo entre $R=15$ e $R=16$, em algum momento a convergência tornou-se mais rara, pois para $R=16$ não se obteve trajetória convergindo. Mais testes seriam necessários para detectar com maior precisão a faixa em que a convergência cessa ou se torna muito mais rara.

4. CONCLUSÕES

Respondendo ao questionamento “para qual faixa de valores há convergência no regime de caos transiente?”, através dos experimentos computacionais realizados, concluímos que no regime de caos transiente, para valores de R entre 14 e 16, há predominância de trajetórias convergentes, enquanto que para valores de R entre 16 e 24 é possível observar órbitas caóticas, mas com raras possibilidades de convergência.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **CHAOS**: An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York, 1996.

HIGHFELLOW. **Lorenz system with flot.js**. Disponível em: <<https://highfellow.github.io/lorenz-attractor/attractor.html>>. Acesso em: 20/02/2020.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v.20, n.2, p. 130–141, 1963.

SALTZMAN, B. Finite amplitude free convection as an initial value problem. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v.19, pp. 329-341, 1962.

TAVARES JUNIOR, R. M.; BECK, V. C. Equações de Lorenz e convecção atmosférica. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - UFPEL, 18. **Anais do XVIII CIC**. Pelotas - RS: Universidade Federal de Pelotas, 2019. Disponível em: <https://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2019/CE_00686.pdf>. Acesso em 10 jun. 2020.