

## CONTROLE DE UM PÊNDULO SUSPENSO UTILIZANDO LÓGICA FUZZY

RACQUEL KNUST DOMINGUES<sup>1</sup>; CÁSSIO TRAPP KRÜGER<sup>2</sup>; SIGMAR DE LIMA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – eng.raknust@gmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – krugercassio@gmail.com

<sup>3</sup>Universidade Federal de Pelotas – sigmar.lima@gmail.com

### 1. INTRODUÇÃO

Dentre os diversos exemplos de sistemas físicos utilizados para o estudo de engenharia de sistemas e técnicas de controle, o pêndulo suspenso é um dos mais ricos. Devido a uma componente não linear, o problema abre possibilidades para aplicação de diversas diferentes de controle para diversas situações desejadas. Geralmente, para tratar de exemplos de sistemas de controle, se faz necessária a obtenção de um modelo do sistema, seja ele analítico ou numérico. Neste trabalho será apresentado o modelo não linearizado do pêndulo suspenso visando apenas demonstrar matematicamente o sistema, pois o controle Fuzzy não necessita de um modelo matemático analítico para controlar corretamente a planta.

### 2. METODOLOGIA

O modelo analítico de um sistema pode ser obtido fazendo uma análise do somatório das forças presentes. A partir da análise destas forças, é possível escrever suas derivadas e formular uma equação diferencial para o sistema. Geralmente, para problemas de sistemas de controle, utiliza-se esta equação diferencial (ou um conjunto delas) para obter o modelo do sistema no domínio do tempo utilizando espaço de estados, ou no domínio da frequência utilizando a transformada de Laplace para obter uma função de transferência.

Observando a Figura 1 é possível visualizar algumas das forças envolvidas no problema. Para melhorar a análise, foi adicionado, também, um coeficiente c.

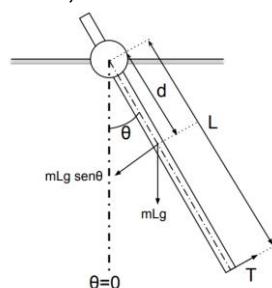


Figura 1 - Esquemático do Sistema Estudado

Fazendo  $\Sigma F = T$ , obtém-se a equação diferencial do sistema:

$$m \cdot L \cdot (d^2\theta/dt^2) + (c/L) \cdot (d\theta/dt) + m \cdot g \cdot \operatorname{sen}(\theta) = T$$

Multiplicando todos os termos por  $1/mL$ , temos:

$$(d^2\theta/dt^2) + (c/m \cdot L^2) \cdot (d\theta/dt) + (g/L) \cdot \operatorname{sen}(\theta) = T/m \cdot L$$

Onde m é a massa da haste, L é o comprimento da haste, θ é o ângulo da haste em relação a posição inicial, T é o torque aplicado à haste, c é o coeficiente de amortecimento e g é a aceleração da gravidade.

O modelo de espaço de estados segue as seguintes equações:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u(t)$$

$$y = C.x + D.u(t)$$

Onde  $x$  é o vetor dos estados e  $x'$  suas derivadas,  $A$  é a matriz que relaciona as derivadas com os estados,  $B$  é a matriz que relaciona as derivadas dos estados com a entrada  $u(t)$  do sistema,  $C$  é a matriz que relaciona os estados com a saída  $y$  e  $D$  é a matriz que relaciona a entrada  $u(t)$  com a saída  $y$ .

A partir da equação diferencial, faz-se a substituição das variáveis por variáveis de fase:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \theta'$$

Derivando  $x_1$  e  $x_2$  obtém-se o espaço de estados:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -(c/m.L^2).x_2 - (g/L).\sin(x_1) + (T/m.L)$$

O cientista tcheco naturalizado inglês Lofti A. Zadeh (1965, 1988) introduziu e desenvolveu a teoria da Lógica Fuzzy e do raciocínio aproximado. A Lógica Fuzzy pode ser vista como uma extensão da lógica de multivalores. Ela modela o modo impreciso do raciocínio humano que é capaz de tomar decisões racionais num ambiente com incerteza e imprecisão. O seu poder mais expressivo é que no limite, ela contém a lógica de dois valores, ou Lógica Booleana.

Os conjuntos Fuzzy são ferramentas que podem ser usadas na manipulação de conceitos vagos e particularmente, Sistemas Fuzzy ou Sistemas Inteligentes, representam os esforços na direção da emulação da capacidade humana. Na teoria clássica dos conjuntos, os conjuntos são ditos "crisp", de tal forma que um dado elemento do universo em discurso (domínio) pertence ou não pertence ao referido conjunto. Na teoria dos conjuntos Fuzzy existe um grau de pertinência de cada elemento a um determinado conjunto.

As variáveis de entrada escolhidas para o problema são o ângulo da haste e a velocidade angular que a mesma se desloca. A variável de saída escolhida é a força aplicada à haste para movimentá-la. Com as variáveis de entrada e saída escolhida, é possível descrever um universo de discurso, no qual determina-se os limites onde o sistema deve trabalhar. Neste caso, definiu-se que o conjunto de valores para o ângulo do pêndulo e para a velocidade angular da haste devem ser:

$$\theta = x_1 \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ rad}$$

$$\theta' = x_2 \in [-1, 1] \text{ rad/seg.}$$

Com o universo de discurso definido, definem-se as funções de pertinência. Neste trabalho, foram escolhidas 3 funções de pertinência para o ângulo e outras 3 para a velocidade, como mostrado na Tabela 1 e nas Figuras 2 e 3:

| Posição |                       | Velocidade |                   |
|---------|-----------------------|------------|-------------------|
| RE      | rotaciona p/ esquerda | VE         | velo. p/ esquerda |
| RO      | centrado              | VO         | velo. nula        |
| RD      | rotaciona p/ direita  | VD         | velo. p/ direita  |

Tabela 1 - Funções de Pertinência

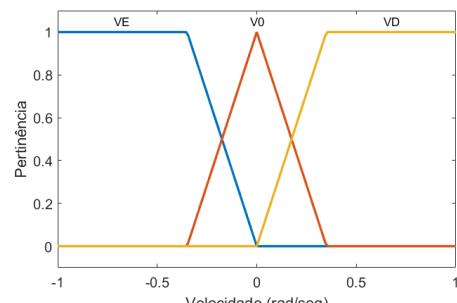
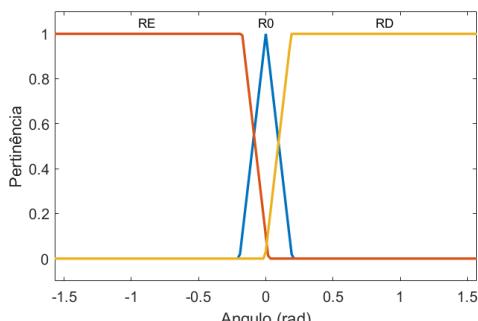


Figura 2 e 3 - Funções de Pertinência da Posição e Velocidade Angular

As regras de controle devem ser estabelecidas de acordo com o funcionamento do sistema, ligando as entradas (funções de pertinência). Um exemplo de regra de controle: Se (if) a posição é RE e (and) a velocidade é VE, então (then) a força deve ser FD2 (força para direita forte). Assim, é possível montar uma tabela de regras estabelecidas a partir das funções de pertinência, como mostrado na Tabela 2:

|    | RE  | RO | RD  |
|----|-----|----|-----|
| VE | FD2 | FD | F0  |
| VO | FD  | F0 | FE  |
| VD | F0  | FE | FE2 |

Tabela 2 – Regras de Controle

Onde FD2 é força para direita forte, FD é força para direita fraca, FE2 é força para esquerda forte, FE é força para esquerda fraca, F0 é força nula.

Na Figura 4 são mostradas as funções de pertinência de saída da lógica Fuzzy (regras de controle).

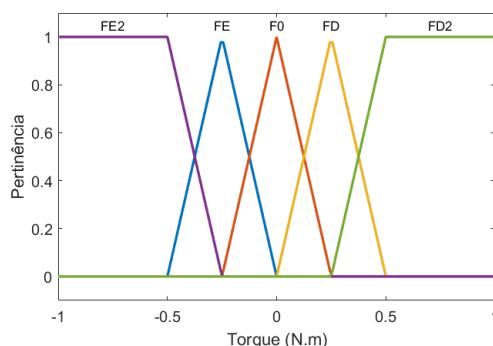


Figura 4 - Funções de Pertinência de Saída

As simulações foram realizadas utilizando o Simulink, desenvolvido pela companhia MathWorks, que é voltado para modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos. Também, foi necessário definir as constantes utilizadas no modelo do sistema para que pudesse ser feita a simulação. Definiu-se c igual a 0.1 N.s/m<sup>2</sup>, m igual a 0.36 Kg e L igual a 0.5 m.

Na Figura 5 é mostrado o modelo do pêndulo construído no Simulink e na Figura 6 é mostrada a planta geral (com controlador Fuzzy e o sistema).

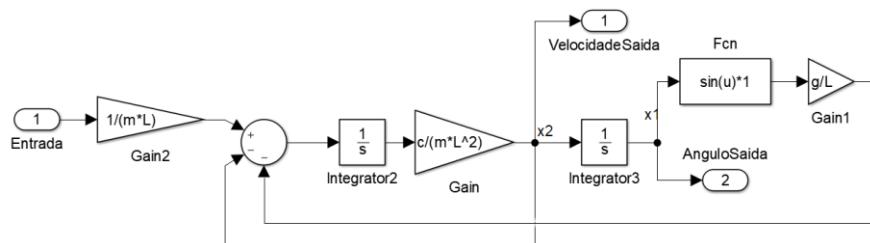


Figura 5 – Modelo do Pêndulo

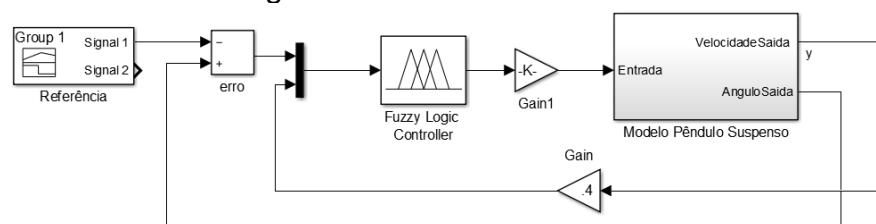
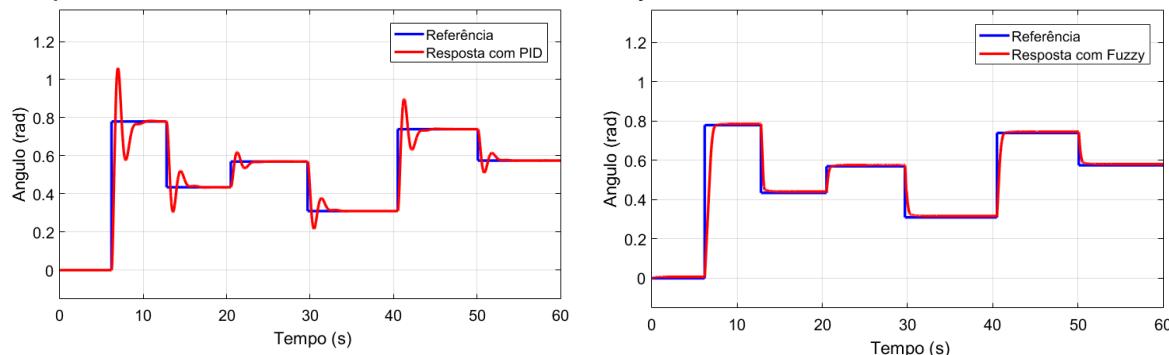


Figura 6 – Planta Geral

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente, realizou-se a simulação do sistema utilizando um controlador clássico, para, posteriormente, ser feita uma comparação entre as respostas de um controlador PID e de um controlador que utiliza lógica Fuzzy. Na Figura 7 é mostrada a resposta do sistema com o controlador PID e na Figura 8 é mostrada a resposta do sistema com o controlador Fuzzy.



Figuras 7 e 8 – Respostas do Sistema ao PID e Fuzzy

A sintonia de um controlador PID é, geralmente, realizada a partir de técnicas que utilizam o modelo analítico do sistema. Entretanto, para este trabalho, os ganhos do controlador PID foram ajustados arbitrariamente para fins de demonstração.

É possível observar que o controlador Fuzzy apresenta uma resposta significativamente melhor em relação ao controle clássico mostrado na Figura 8. A resposta do controle PID apresenta um overshoot consideravelmente grande para variações bruscas no sinal de referência e um pequeno comportamento oscilatório até que o erro se aproxime de zero. Já a resposta do controle Fuzzy apresenta um overshoot praticamente nulo e nenhuma característica oscilatória para variações no sinal de referência.

### 4. CONCLUSÕES

O estudo apresentado neste trabalho traz uma demonstração, através de simulações, da grandiosidade de utilizar lógica Fuzzy para controlar um sistema. Embora neste trabalho tenha sido demonstrada a modelagem analítica do sistema, a utilização de um controlador Fuzzy não necessita do conhecimento sobre o modelo do sistema. Através de um bom entendimento do problema, de uma boa definição do universo de discurso e das regras de controle estabelecidas a partir das funções de pertinência, é possível realizar o controle do sistema.

### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. Information and control. **Elsevier**, Amsterdam, v.8, n.3, p. 338-353, 1965.