5ª SEMANA INTEGRADA UFPEL 2019
CEG V CONGRESSO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO

MÉTODOS MATEMÁTICOS AVANÇADOS EM ENGENHARIA

MATEUS DOS SANTOS[1];
EDUARDO DA SILVA SCHNEIDER[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – mateusdossantos115@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – eduardo.schneider@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

O projeto de ensino **Métodos matemáticos avançados em Engenharia** da Universidade Feredal de Pelotas (UFpel), visa propiciar aos estudantes do Centro de Engenharias (CEng) um panorama dos principais conceitos e técnicas de resolução de equações diferenciais parciais aplicadas à problemas de Engenharia. Alguns dos tópicos abordados são comuns aos estudados na disciplina de Equações Diferenciais B (EDB), que é uma disciplina optativa sub-sequente a disciplina de Equações diferenciais A (EDA), porém, dificilmente ofertada pelos cursos de graduação do CEng.

O projeto encontra-se na fase de implementação. O primeiro tópico escolhido como tema de estudo foi a equação do calor. Tal escolha tem como justificativa o fato que a equação do calor é de grande importância teórica nas áreas de física e matemática. Além disso, possui diversas aplicações em problemas de Engenharia (BOYCE e DIPRIMA, 2010; O'NEAL, 2011).

A derivação da equação da condução do calor é baseada nos conceitos de calor e temperatura e na relação entre os mesmos. Como desenvolvido por OZISIK (1993), a energia cedida por partículas tais como átomos e moléculas, que fluem das regiões mais quentes para as mais frias de um corpo é denominada calor. Já a temperatura é uma grandeza física escalar, definida pelo grau de agitação das moléculas de um corpo, ou seja, quanto maior for a agitação, maior será a temperatura do corpo.

Se a temperatura é uma função da posição e do tempo, então podemos relacionar o gradiente de temperatura com o fluxo de calor. Com base em observações e dados experimentais, Fourier estabeleceu uma relação básica entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura:

$$q(r,t) = -K\,\nabla T(r,t), \tag{1}$$

onde $q(r,t)$ é o fluxo de calor, $T(r,t)$ é a temperatura e K a condutividade térmica do material.

De forma geral, a equação de calor é obtida a partir da equação do balanço de variação de energia de um pequeno corpo de volume V. Considerando as propriedades do corpo sendo estacionárias, homogêneas e isotrópicas temos a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix}\text{taxa de calor}\\ \text{entrando através}\\ \text{da superfície de V}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{taxa de energia}\\ \text{gerada}\\ \text{dentro de V}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{taxa de}\\ \text{armazenagem de}\\ \text{calor em V}\end{bmatrix}, \tag{2}$$

Além disso, assumindo que a taxa de geração de energia dentro do sistema é nula, isto é, o segundo termo na equação (2) é zero, e escrevendo expressões apropriadas para a taxa de calor que entra através da superfície e para a taxa de armazenagem de calor no corpo, após algumas simplificações obtemos a equação calor na forma:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (3)$$

onde a constante α^{-1} é definida como a condutividade térmica do material.

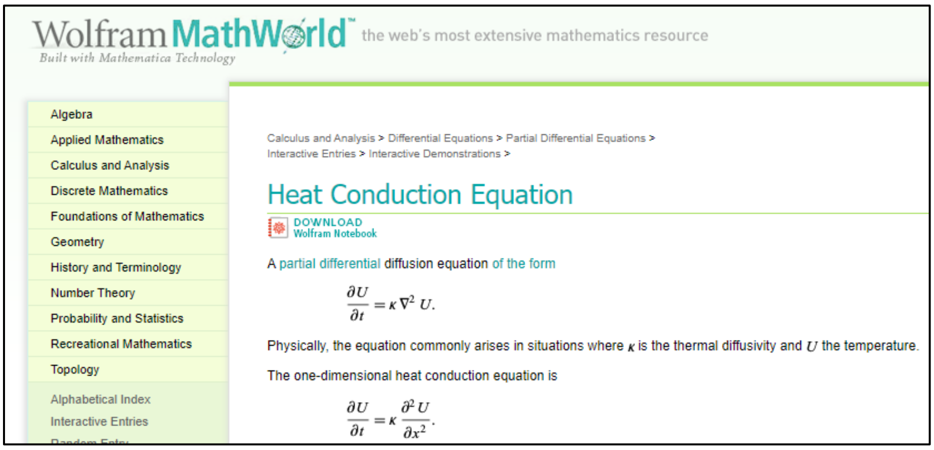
2. METODOLOGIA

O projeto de Métodos Matemáticos Avançados em Engenharia está sendo desenvolvido e realizado na forma de encontros periódicos, como seminários, estudos dirigidos e resolução de problemas em grupo, atividades essas que são abertas a toda a comunidade do CEng, mas voltada, principalmente, aos discentes que já possuem uma formação inicial nas disciplinas de Cálculo A, Cálculo B e Equações Diferenciais A e têm interesse em expandir e aprofundar seus conhecimentos em métodos matemáticos para resolução de problemas aplicados à Engenharia.

Para a realização das atividades do projeto, está sendo desenvolvido um material didático, em língua portuguesa, que serve de base para a realização dos encontros. No material didático são apresentados os fundamentos teóricos, exemplos e aplicações sobre determinado tópico e o conjunto de técnicas e ferramentas matemáticas necessárias para a obtenção das soluções dos problemas propostos, sejam essas soluções analíticas, numéricas ou gráficas.

Devido a forma e conteúdo dos materiais didáticos produzidos, optamos por escrevê-los em LaTeX, uma vez que essa linguagem permite gerar materiais técnicos e científicos com alta qualidade gráfica. Além disso, optamos por utilizar o Overleaf, que é um editor LaTeX online gratuito e que, dentre outras características, permite escrita colaborativa. Uma amostra do tipo de material que vislumbramos produzir e expandir pode ser acessado no site Wolfram.com, conforme Figura 1.

Figura 1: Wolfram MathWorld site.



Fonte: http://mathworld.wolfram.com/HeatConductionEquation.html.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o desenvolvimento e confecção do material didático utilizado nos encontros estão sendo realizadas reuniões semanais do bolsista com o professor coordenador do projeto. Nessas reuniões são estudados os conceitos teóricos e ferramentas matemáticas necessárias para o entendimento e resolução dos problemas propostos.

Por exemplo, partindo dos conceitos de temperatura e calor e da equação de balanço de variação de energia de um pequeno corpo de volume V, chegamos na equação do calor, conforme a equação (3). Nesse ponto, podemos notar que a equação (3) depende do laplaciano da função temperatura T, ou seja, o lado direito da equação depende da geometria do problema. Em coordenadas cartesianas retangulares o laplaciano de uma função $T(r,t) = T(x,y,z,t)$ é dado por

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \qquad (4)$$

Para diferentes configurações do corpo V, e em consequência das condições de contorno do problema, pode ser mais adequado a escolha de outros sistemas de coordenadas que não coordenadas cartesianas retangulares. Utilizando os conceitos de derivada parcial e a regra da cadeia para funções de várias variáveis, estudados na disciplina de Cálculo B, podemos escrever o laplaciano de T em coordenadas cilíndricas como

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial T}{\partial z}, \qquad (5)$$

onde $T(r,t) = T(r,\theta,z,t)$. Já em coordenadas esféricas o laplaciano assume a forma

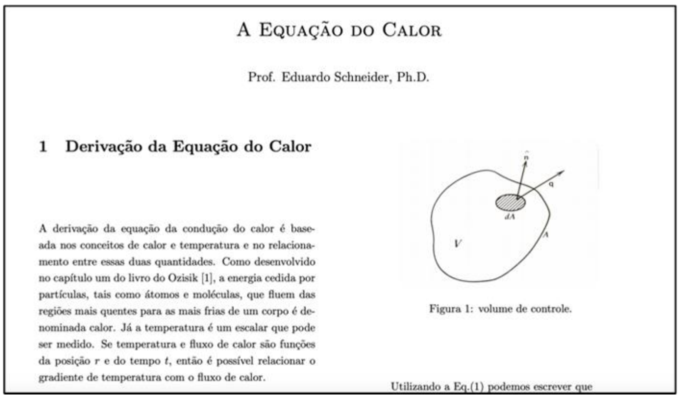
$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\theta}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}, \qquad (6)$$

onde $T(r,t) = T(\rho,\varphi,\theta,t)$.

Após o estudo e discussão dos conceitos teóricos, das técnicas matemáticas adequadas para a resolução de cada problema ou tópico proposto e da obtenção dos resultados, o bolsista é orientado a proceder a edição do texto em LaTeX. Contudo, mesmo entre estudantes de ciências exatas, incluindo os discentes do CEng, a utilização do LaTeX não é, amplamente, difundida. Nesse sentido, é necessário um tempo extra do bolsista, dedicado ao aprendizado e real utilização dessa ferramenta de edição de textos. Uma amostra do material já produzido para o primeiro encontro pode ser visualizada na Figura 2.

Como bolsista do projeto, até o momento, posso destacar alguns aprendizados que tive e que, certamente, irão complementar minha formação em nível de graduação, tais como, a versão diferencial da equação do calor através da equação de balanço da variação de energia, que é uma equação integro-diferencial. Além disso, utilizando conceitos de funções de várias variáveis consegui expressar o laplaciano de uma função em diferentes sistemas de coordenadas. Também aprendi a escrever e editar textos e, principalmente, fórmulas matemáticas em LaTeX.

Figura 2: Material didático produzido no projeto.



A EQUAÇÃO DO CALOR

Prof. Eduardo Schneider, Ph.D.

1 Derivação da Equação do Calor

A derivação da equação da condução do calor é baseada nos conceitos de calor e temperatura e no relacionamento entre essas duas quantidades. Como desenvolvido no capítulo um do livro do Ozisik [1], a energia cedida por partículas, tais como átomos e moléculas, que fluem das regiões mais quentes para as mais frias de um corpo é denominada calor. Já a temperatura é um escalar que pode ser medido. Se temperatura e fluxo de calor são funções da posição r e do tempo t, então é possível relacionar o gradiente de temperatura com o fluxo de calor.

Figura 1: volume de controle.

Utilizando a Eq.(1) podemos escrever que

4. CONCLUSÕES

O projeto em Métodos matemáticos avançados em Engenharia é um projeto de ensino desenvolvido com o propósito de complementar a formação dos egressos dos cursos de Engenharia do CEng, através de atividades periódicas como seminários, estudos dirigidos e grupos de estudos, utilizando métodos matemáticos voltados a resolução de problemas com aplicações em Engenharia.

Para a realização dessas atividades o bolsista está desenvolvendo um material didático, juntamente com o coordenador do projeto e fazendo uso de bibliografias como auxílio. Logo após esse material é digitado em um editor LaTeX, a fim de obtermos materiais técnicos e científicos com alta qualidade gráfica para posterior divulgação.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÖZISIK, M. N., **Heat Conduction**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

O'NEAL, P. V., **Advanced Engineering Mathematics**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

WOLFRAM. **Heat Conduction Equation.** Acessado em 09 set. 2019. Online. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/HeatConductionEquation.html.