

## REGRESSÃO LINEAR POLINOMIAL APLICADA À MODELAGEM DE MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS

MATHEUS FELICIO PALMEIRA DOS SANTOS<sup>1</sup>; INGRID AUGUSTO CANECA  
DA SILVA<sup>2</sup>; LUIZ FERNANDO DE FREITAS GUTIERRES<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Fundação Universidade Federal do Pampa, Campus Bagé (UNIPAMPA-CB); Grupo de Estudos Avançados em Engenharia de Energia (GrEEen) – [mfeliciops@alunos.unipampa.edu.br](mailto:mfeliciops@alunos.unipampa.edu.br)

<sup>2</sup>UNIPAMPA-CB; GrEEen – [ingridcaneca@alunos.unipampa.edu.br](mailto:ingridcaneca@alunos.unipampa.edu.br)

<sup>3</sup> UNIPAMPA-CB; GrEEen – [luizgutierres@unipampa.edu.br](mailto:luizgutierres@unipampa.edu.br)

### 1. INTRODUÇÃO

O Eletromagnetismo exerce influência direta no projeto e desenvolvimento tecnológico de vários setores da Engenharia. Transformadores, motores elétricos e geradores elétricos são exemplos de aplicações que dependem de fenômenos eletromagnéticos (BOYLESTAD, 2012). A indução magnética  $B$  (em T) expressa a capacidade de induzir fluxo magnético em um meio e é dada por

$$B = \mu H, \quad (1)$$

Onde  $\mu$  é permeabilidade magnética (H/m) e  $H$  é o campo magnético (A/m).

Materiais ferromagnéticos são amplamente empregados em dispositivos eletromagnéticos devido a suas elevadas permeabilidades e caracterizam-se por apresentar uma relação não-linear de  $B(H)$ . Isso corresponde à saturação magnética cujo comportamento é representado via curvas de magnetização e histerese, vide Figura 1. Diversos trabalhos foram propostos para descrever esse fenômeno, como o modelo de JILES e ATHERTON (1983). Neste estudo, realizam-se ajustes via regressão linear polinomial de curvas características de materiais ferromagnéticos. Dessa maneira, busca-se reproduzir satisfatoriamente o comportamento gráfico (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

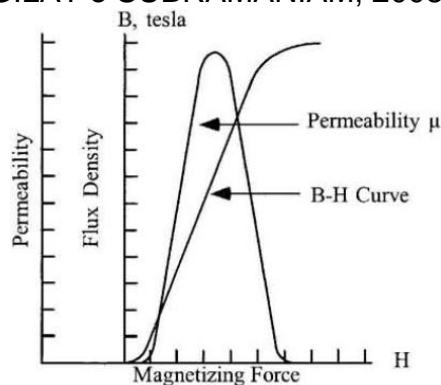


Figura 1: Curvas  $\mu$  e  $B(H)$  para dado material. Fonte: McLyman (2004).

### 2. METODOLOGIA

Curvas  $B(H)$  disponíveis na literatura especializada foram utilizadas nos estudos descritos na sequência. No trabalho de ROCHA e MEZA (2005), apresentam-se dados de magnetização do aço fundido, aço-silício e liga de ferro-níquel. As condições gráficas são suficientes para os ajustes de curva realizados neste trabalho. Regressão linear polinomial é um procedimento empregado para a determinação dos coeficientes de um polinômio, de forma a produzir o melhor ajuste para um conjunto de dados (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

Para um polinômio de segundo grau, define-se que

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k^1 & \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k^1 & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^1 \times y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 \times y_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde  $x_k$  é o Campo Magnético;  $y_i$  é a indução magnética; e as letras ( $a, b, c$ ) são as variáveis que se quer encontrar no ajuste.

O coeficiente de determinação  $R^2$  indica o quão bem o ajuste prevê o comportamento gráfico (MATHWORKS, 2019), variando entre 0 e 1. É dado por

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{k=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3)$$

Onde  $y_i$  é a indução magnética;  $\hat{y}_i$  é o valor ajustado da densidade magnética; e  $\bar{y}$  é a média aritmética desses valores.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

No Matlab, um algoritmo foi desenvolvido para determinar os parâmetros da regressão linear polinomial por trecho e por conjunto completo de dados, bem como o coeficiente de determinação e gráficos resultantes para o aço fundido, aço-silício e liga de ferro-níquel. Os resultados são elencados abaixo para cada material.

---

```
%% MATERIAL
x = [MEDIDAS H (A/m) segundo ROCHA e MEZA (2005)];
y = [MEDIDAS B (T) segundo ROCHA e MEZA (2005)];
n = length (x);
m = 2; %% GRAU DO POLIMONIO
%% DETERMINA PARÂMETROS
a(1,1) = n;
b(1,1) = sum(y);
for i = 1:2*m;
    xsum(i)=sum(x.^(i));
End
for j = 2:m+1;
    a(1,j) = xsum(j-1);
End
for i = 2:m+1;
    for j = 1:m+1;
        a(i,j) = xsum(j+i-2);
    End
    b(i,1) = sum(x.^(i-1).*y);
End
%% OBTER COEFICIENTES POLINOMIAL
p = (a\b)';
for i = 1:m+1
    pcoef(i)=p(m+2-i);
End
%% COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO
yCALC = polyval (pcoef,x);
R = 1 - sum((y - yCALC).^2)/sum((y - mean(y)).^2)
%% GRÁFICO
e = x;
stressfit = polyval (pcoef, e);
plot(x,y,'cx',e,stressfit,'k');
title ('Curva de Histerese - Aço Fundido')
ylabel('B (T)')
xlabel('H (A/m)')
```

---

```
legend ({'Pontos Experimentais', 'Ajuste Polinomial'}, 'Location', 'southeast')  
hold on
```

Pseudocódigo 1: Algoritmo desenvolvido no Matlab. Fonte: Autores (2019).

### 3.1. Aço fundido

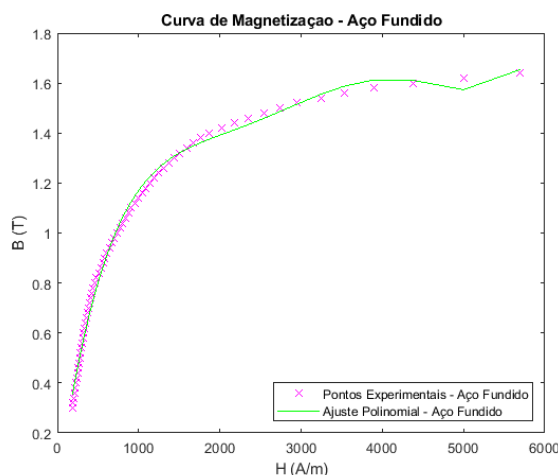


Figura 2: Ajuste polinomial por completo. Fonte: Autores (2019).

Tabela 1: Ajuste de curva polinomial para o aço fundido.

$B(H)$	$R^2$
$5,69 \times 10^{-18} \times H^5 - 9,16 \times 10^{-14} \times H^4 + 5,55 \times 10^{-10} \times H^3$ $- 1,60 \times 10^{-6} \times H^2 + 2,32 \times 10^{-3} \times H^1 - 2,47 \times 10^{-2}$	0,995

Fonte: Autores (2019).

### 3.2. Aço-silício

Tabela 2: Ajuste de curva polinomial para o aço-silício.

$B(H)$	$R^2$
$5,67 \times 10^{-24} \times H^7 - 1,22 \times 10^{-19} \times H^6 + 1,03 \times 10^{-15} \times H^5$ $- 4,43 \times 10^{-12} \times H^4 + 1,01 \times 10^{-08} \times H^3$ $- 1,18 \times 10^{-5} \times H^2 + 6,39 \times 10^{-3} \times H^1 + 1,57 \times 10^{-2}$	0,959

Fonte: Autores (2019).

### 3.3. Liga de ferro-níquel

Tabela 3 — Ajuste de curva polinomial para a liga de ferro-níquel.

$B(H)$	$R^2$
$-6,39 \times 10^{-48} \times H^{15} - 6,49 \times 10^{-44} \times H^{14} + 4,54 \times 10^{-40} \times H^{13}$ $+ 5,87 \times 10^{-38} \times H^{12} - 4,67 \times 10^{-34} \times H^{11}$ $- 7,31 \times 10^{-30} \times H^{10} - 6,60 \times 10^{-27} \times H^9$ $+ 3,06 \times 10^{-23} H^8 + 2,83 \times 10^{-19} \times H^7$ $- 1,17 \times 10^{-15} \times H^6 + 1,86 \times 10^{-12} \times H^5$ $- 1,54 \times 10^{-9} \times H^4 + 7,01 \times 10^{-7} \times H^3$ $- 1,68 \times 10^{-4} \times H^2 + 1,93 \times 10^{-2} \times H^1 + 3,76$	0,959

Fonte: Autores (2019).

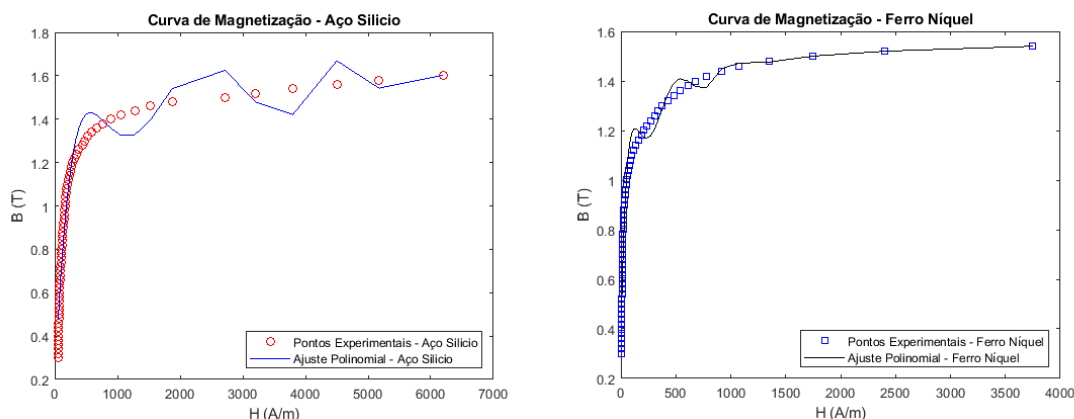


Figura 3 – Ajuste polinomial por completo. Fonte: Autores (2019).

Definiu-se um ajuste das medidas do aço-silício e da liga de ferro-níquel em respeito a equações de 7ª e 15ª ordem respectivamente. Isso garantiu um  $R^2 \geq 0,95$ . A fim de alcançar um  $R^2 \approx 1$ , o grau da equação polinomial pode ser alterado pelo usuário.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, um modelo matemático é determinado via regressão linear polinomial com nível de precisão satisfatório. A estratégia de aferir a precisão com base em  $R^2$  permite alterar a ordem do polinômio ajustado até certo patamar ser atingido. Isso garante que as características de dado material possam ser reproduzidas adequadamente. Isso pode ser observado no caso da liga de ferro-níquel em que o polinômio apresenta um maior grau.

Como trabalhos futuros, objetiva-se melhorar a capacidade de ajuste de curva e obter maiores índices de precisão. Dessa forma, almeja-se caracterizar precisamente materiais ferromagnéticos e identificar também a influência do número de amostras assumido para a análise do algoritmo.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYLESTAD, R. L. **Introdução à Análise de Circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.
- GILAT, A. SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- MATHWORKS INC. **Linear Regression**. Disponível em: <<https://bit.ly/30joLLB>>. Acesso em: 18 mai. 2019.
- MCLYMAN, Colonel Wm. **Transformer and Inductor Design Handbook**. 2. ed. New York: Marcel Dekker, Inc, 2004.
- ROCHA, M. A.; MEZA, R. A. **Modelagem de Curvas de Magnetização para Solução Interativa de Circuitos Magnéticos Não Lineares**. 2005. Projeto Final de Graduação (Bacharel em Engenharia Elétrica) – Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, Curitiba.
- JILES, D.; ATHERTON, D. Ferromagnetic hysteresis. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 19, n. 5, p. 2183-2185, set. 1983.