

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DO CALOR PARA UMA PAREDE SIMPLES

PATRICK GARCIA MACHADO¹; EDUARDO DE SÁ BUENO NÓBREGA²;
PATRÍCIA MICHIE UMETSUBO³; DANIELA BUSKE⁴

¹Universidade Federal de Pelotas – patrickgarciamachado@gmail.com

²Universidade Federal de Pelotas – eduardosbnobrega@gmail.com

³Universidade Federal de Pelotas – patumetsubo@gmail.com

⁴Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

O conforto térmico em uma edificação é um fator importante que permeia a construção civil, devendo atender as diversas necessidades da população. De acordo com SIQUEIRA et al. (2005), um elemento determinante para a avaliação do desempenho térmico de edificações é a influência das condições climáticas. Por diversas razões, a climatologia da construção vem adquirindo grande importância. Nas últimas décadas, observa-se a tendência de se projetar edificações de forma a considerar adequadamente os fatores ambientais. Esse procedimento evita o desperdício de energia para climatizar um ambiente construído mediante calefação e/ou refrigeração artificiais.

Neste contexto, a energia sustentável entra em cena com um papel importante seja na construção civil, seja nas questões relacionadas ao clima. Assim, para SPECHT et al. (2010) o projeto de edificações energeticamente eficiente necessita de conhecimentos sobre a transferência de calor do ambiente externo para o interior das edificações, a fim de criar soluções que associem diferentes materiais e dimensões de camadas às condições desejadas de conforto térmico.

Teoricamente, a transferência de calor é associada a experimentos de laboratório, resultando em programas computacionais que podem ser usados como ferramenta de análise e projeto. Na literatura, é possível utilizar referências presentes em diversos trabalhos, produzidos desde a década de 1970 até hoje, nos mais diversos países.

Com isso, o objetivo deste trabalho é a descrição da transferência de calor entre ambiente e paredes, a fim de compreender as trocas de calor que acontecem entre ambiente externo e interno de uma edificação, bem como as condições de conforto térmico de seus compartimentos. As equações necessárias para o desenvolvimento desta análise serão desenvolvidas de forma analítica, através do método de separação de variáveis.

2. METODOLOGIA

A equação que descreve a distribuição do calor é uma equação diferencial parcial, com vários métodos analíticos ou numéricos possibilitando sua solução. Neste trabalho, esta será solucionada analiticamente utilizando-se o método de separação de variáveis.

Para modelar o problema proposto, inicialmente tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

sujeita às condições de contorno e inicial:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(T). \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \quad (3)$$

$$T(x, 0) = F(x) = T_0, \quad (4)$$

onde α é a difusividade térmica e k a condutividade térmica do material.

Segundo o método da separação de variáveis, escreve-se a solução $T(x, t)$ como:

$$T(x, t) = F(x)G(t). \quad (5)$$

Reescrevendo a equação (1), tem-se:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{G''(t)}{G(t)} = -\lambda. \quad (6)$$

Como cada membro da equação (6) é uma função de apenas uma variável, pode-se, por exemplo, fixar x e deixar a variável t livre (ou vice-versa). Assim, ambos os membros da equação permanecem constantes ainda que seus argumentos variem, o que resulta no seguinte sistema a ser resolvido:

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0. \quad (7)$$

$$G''(t) + \alpha \lambda G(t) = 0. \quad (8)$$

Aplicando-se as condições de contorno, o sistema origina um problema de Sturm-Liouville que nos dará como soluções as seguintes equações:

$$F_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

$$G_n(x) = B_n e^{\frac{-n^2 \alpha t}{L^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Uma vez obtidas as funções F e G , encontra-se a solução do problema proposto que é representada por:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{\frac{-n^2 \alpha t}{L^2}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right), \quad (11)$$

onde C_n é encontrada aplicando-se a condição inicial do problema dada por

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0 \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx. \quad (12)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para analisar a solução encontrada, utilizam-se as mesmas características térmicas e físicas do trabalho de BARBOSA (2013) e UCHÔA (2007). Supõe-se que o material do sólido é um concreto com as características apresentadas na Tabela 1:

Característica	Valor
Condutividade térmica (k)	1,4 Jm°C/s
Densidade da massa (ρ)	2310 kg/m ³
Capacidade térmica específica (C)	1000 J°C/kg
Difusividade térmica (α)	6,061x10 ⁻⁷ m²/s

Tabela 1: Características térmicas e físicas do sólido

A geometria desse sólido possui espessura de 20cm, tamanho semelhante a uma parede finalizada. Considera-se que a temperatura média do sólido é de 21°C e que suas extremidades sejam mantidas à T=0°C.

A solução do problema proposto é dada pelas equações (11) e (12) e foi implementada utilizando o código *Scilab*. Na Figura 1, apresenta-se a solução da equação para $t=t_0$.

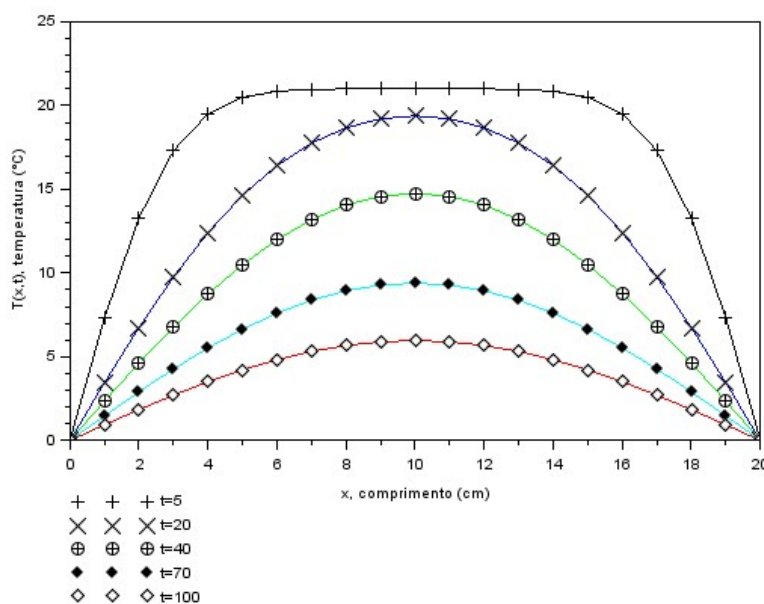


Figura 1: Solução da equação $u=u(x,t_0)$.

A Figura 1 aponta que o sólido mantido com as suas extremidades em temperatura constante ($T(0,t)=T(L=20,t)=0^\circ\text{C}$), apresenta uma maior variação de temperatura quanto mais perto de suas extremidades for analisado. Através da equação (12), nota-se que o sólido sofre perda de temperatura em função do tempo e que essa perda acontece de forma mais rápida quanto mais próximo da extremidade do sólido estiver. Isso é confirmado pela configuração do gráfico plotado segundo o tempo e o comprimento do sólido, na Figura 2:

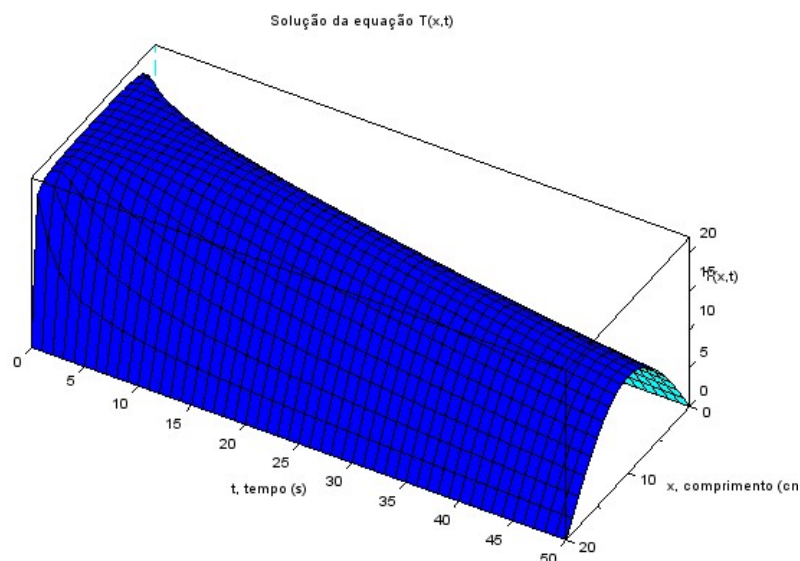


Figura 2: Solução da equação $T(x,t)$.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho é uma solução analítica do problema de condução de calor em meios simples, neste caso, uma parede. A solução foi encontrada pelo método de separação de variáveis com aplicação dos coeficientes de uma série de Fourier de senos. Essa solução permite o cálculo em qualquer meio simples (com apenas uma camada), como paredes, placas metálicas entre outros, devendo ser alterado as propriedades físicas e térmicas de acordo com o material em estudo.

A modelagem da solução em linguagem *Scilab* apresentou resultados compatíveis com outras soluções já conhecidas, como por exemplo a técnica da Transformada de Laplace e as Funções de Green. Além disso, o modelo estudado não envolve o cálculo de transformadas inversas ou funções apropriadas (no caso das Funções de Green) o que conforme SPECHT (2005) torna estes métodos limitados.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, A. **Estudo Numérico Computacional e Analítico do Choque Térmico em Fachadas de Edificações**. 2013. Tese (Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília.

SIQUEIRA, T. C. P. A. et al. Dados climáticos para avaliação de desempenho térmico de edificações. **Revista Escla de Minas**, v. 58, n. 2, p. 133-138, 2005.

SPECHT, L. P. et al. Análise da transferência de calor em paredes compostas por diferentes materiais. **Ambiente Construído**, v. 10, n. 4, p. 7 - 18, 2010.

UCHÔA, J. C. B. **Procedimento numérico e experimental para a avaliação da resistência à fadiga de sistemas de revestimento**. 2007 Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil) - Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília.