

## Comparação entre a dinâmica contínua e discreta de um modelo presa-predador de duas espécies

**ALINE GOULART DA SILVEIRA<sup>1</sup>; JOÃO INÁCIO MOREIRA BEZERRA<sup>2</sup>;  
ALEXANDRE MOLTER<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – [alinegsilveira@live.com](mailto:alinegsilveira@live.com)

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – [jimbezerra@inf.ufpel.edu.br](mailto:jimbezerra@inf.ufpel.edu.br)

<sup>3</sup>Universidade Federal de Pelotas – [alexandre.molter@yahoo.com.br](mailto:alexandre.molter@yahoo.com.br)

### 1. INTRODUÇÃO

O interesse em estudar o comportamento de espécies na natureza é antigo e a modelagem matemática da interação entre populações tem sido uma importante ferramenta nesses estudos.

Sistemas dinâmicos discretos, em uma dimensão, podem exibir um comportamento caótico, enquanto as correspondentes equações de evolução contínua não podem sequer possuir uma solução periódica não trivial (KRIVINE, 2007).

Segundo Silva(2007) as equações de Lotka Volterra retratam um sistema presa-predador de duas espécies em que, o número de indivíduos da população de predadores depende diretamente da quantidade de indivíduos da população de presas na região e vice e versa.

Este trabalho tem como objetivo mostrar, tanto em tempo discreto como em tempo contínuo, o comportamento de um sistema não linear presa-predador, de duas espécies. As simulações mostram que as trajetórias dos modelos contínuo e discreto se equivalem. No entanto, com a variação de um dos parâmetros, na dinâmica discreta, o sistema apresenta comportamento caótico.

### 2. METODOLOGIA

Nos ecossistemas a interação entre duas espécies distintas varia de acordo com o tipo de efeito que uma espécie causa na outra..

Neste trabalho, é considerado o seguinte modelo de Lotka-Volterra(HE,LAI,2011):

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left[ r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\alpha xy}{x^2 + \beta^2} \right] \\ \dot{y} = sy \left( 1 - \frac{d}{y} \right) \end{cases} \quad (1)$$

X é a população da presa e y a população do predador.  $r, \alpha, \beta, s, d$  são parâmetros positivos do sistema.  $K$  é a capacidade de carga de x quando  $y \equiv 0$ .

Com o intuito de discretizar o sistema, será utilizado o método de Euler, no qual tem-se como objetivo discretizar uma equação diferencial descrita no seguinte formato:

$$\frac{dy}{dx} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad t_0 \leq t \leq t_f$$

O tamanho do passo para a discretização é definido como  $h$ . Atribuindo-se a cada passo um instante de tempo dentro do intervalo tem-se que:

$$t_n = t_0 + nh$$

Com isso, tem-se que:

$$t_{n+1} = t_n + h$$

E portanto, tem-se que:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (2)$$

é o modelo discretizado da equação.

Quanto menor o valor de  $h$ , mais passos serão dados dentro de um mesmo intervalo, o que implica em uma aproximação significativa da solução discretizada com a solução analítica.

Aplicando-se a discretização (2) no sistema (1), fica-se com o seguinte sistema de tempo discreto:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hx_n \left[ r \left( 1 - \frac{x_n}{K} \right) - \frac{\alpha x_n y_n}{x_n^2 + \beta^2} \right] \\ y_{n+1} = y_n + hsy_n \left( 1 - \frac{d}{y_n} \right). \end{cases}$$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram usados os valores de parâmetros:  $d = 1, s = 0.5, r = 3, K = 2, \alpha = 9, \beta = \sqrt{5}$ .

A Figura 1 e a Figura 2 mostram as soluções obtidas do sistema contínuo e do sistema discretizado sobrepostas, tanto para a presa como para o predador, o que mostra que o método de Euler é eficiente na discretização de sistemas de tempo contínuo.

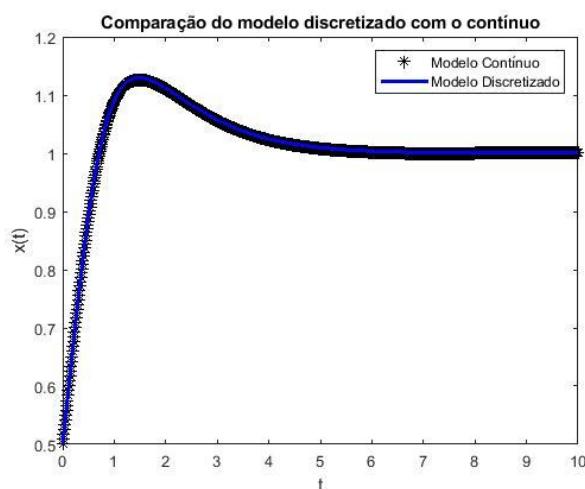


Figura 1: Comparação da população da presa do modelo discretizado com o contínuo.

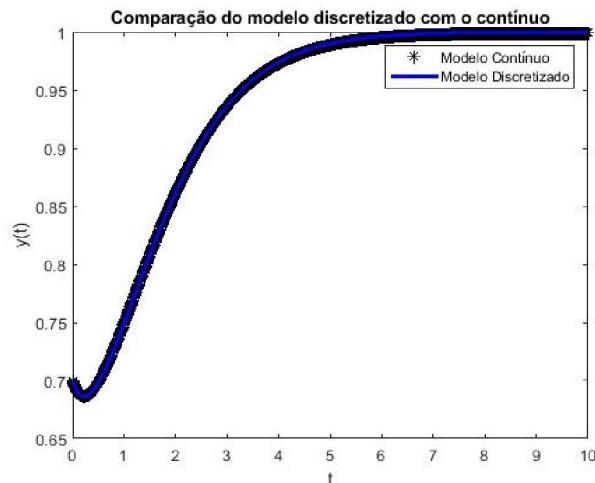


Figura 2: Comparação da população da presa do modelo discretizado com o contínuo.

Porém a medida que se altera o tamanho do passo no método discretizado, ocorrem alterações no comportamento do sistema. Esses alterações são mostradas na Figura 3 e na Figura 4, que foram realizadas com os seguintes valores de parâmetros:  $n = 1, s = 1, r = 9, K = 2, a = \frac{81}{17}, \beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ .

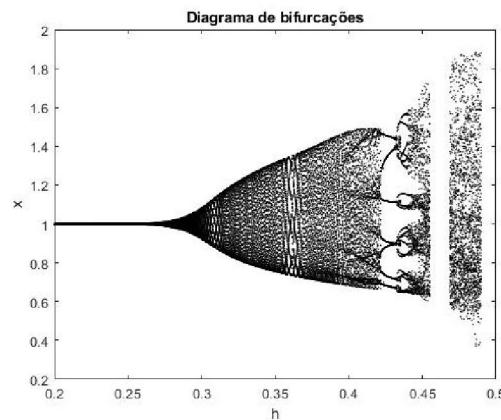


Figura 3: Diagrama de bifurcações da densidade populacional da presa.

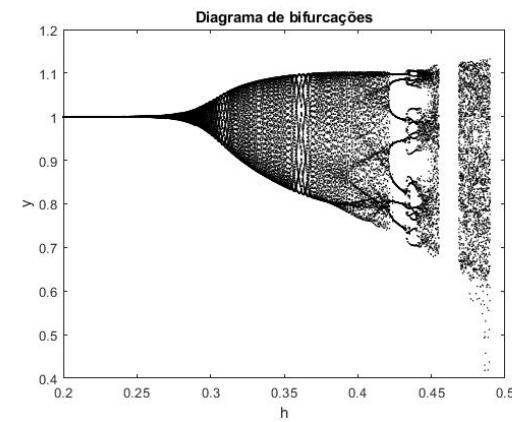


Figura 4: Diagrama de bifurcações da densidade populacional do predador.

Ao analisar-se os diagramas de bifurcações, tanto da densidade populacional da presa como do predador, percebemos que para  $h < 0.30$ , as soluções tendem a um único ponto final. Já para valores do tamanho do passo acima desse valor, existem algumas janelas periódicas, assim como janelas que fazem com que o sistema tenha comportamento caótico.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi mostrado que o sistema em geral, percebeu-se que um sistema não linear apresentou diferentes formatos e comportamentos quando discretizados. Para o sistema, Lotka Volterra, temos que no tempo contínuo apresenta um comportamento estável enquanto na forma discreta apresentou dois comportamentos distintos, um similar ao contínuo para determinados valores de parâmetros e o outro caótico. Na sequência deste trabalho serão estudados outros sistemas estáveis no contínuo e que no discreto apresentam instabilidade.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HE, Z, LAI, X. Bifurcation and chaotic behavior of a discrete time predator-prey system. **Nonlinear Analysis: Real-world applications**. v. 12, 1, pg 403-417, 2011.

SILVA, A. A. N. **Análise Numérica de Sistemas Dinâmicos**. 2007. Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do curso de Ciência da Computação para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

STROGATZ, Steven. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. San Bernardino, Perseus Books Publishing, LLC, 2013. 498p.

KIVRINE, H. LESNE, A. TREINER, J. Discrete-time and continuous-time modelling: some bridges and gaps. **Math. Struct. in Comp. Science**, Cambridge University Press, vol. 17, pp. 261–276, 2007.

KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge University Press, 2001

LORENZ, E.N. (1972). **Predictability: does the flap of a butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas?** 139th Annual Meeting of American Association for the Advancement of Science. (29 Dec 1972).

PALIS, J. (1994). **Dinâmica não-linear, sistemas caóticos e aplicações**. São Paulo, SP. Estudos Avançados, vol. 8, no. 20. Jan. - Abr. 1994.